

Tytuł projektu; Innowacyjne urządzenie do wykonywania testów wydajnościowych naftowych otworów wiertniczych.



**INSTYTUT MASZYN PRZEPŁYWOWYCH**  
im. Roberta Szwalskiego  
**POLSKIEJ KADEMII NAUK**  
80-952 Gdańsk ul. J. Fiszera 14

Tel. (centr.): 058 3460881 Fax: 058 3416144

e-mail: [imp@imp.gda.pl](mailto:imp@imp.gda.pl)

Tel. (sekr.): 058 3416071

[www.imp.gda.pl](http://www.imp.gda.pl)

**Marcin Lackowski, Tomasz Ochrymiuk, Paweł Flaszynski**

**Wstępne założenia modelowania CFD wybranych elementów separatorów poziomych z demisterami.**

**Gdańsk, luty 2017**

## Wstęp

Do rozdziału układów niejednorodnych występujących w oczyszczaniu ropy naftowej typu gaz/ciecz/ciecz wykorzystywane są trzy typy mechanizmów separacji.

Pierwszy oparty na różnicy pędu, wykorzystuje fakt iż poruszające się składniki mieszaniny niejednorodnej mają różne wielkości pędu, co związane jest głównie z ich różną gęstością. W przypadku gwałtownej zmiany kierunku strumienia dwufazowego, pęd frakcji fazy lżejszej powoli na szybszą zmianę kierunku przepływu niż frakcji fazy cięższej. Zasada ta jest wykorzystywana przede wszystkim przy separacji dużej ilości mieszanin.

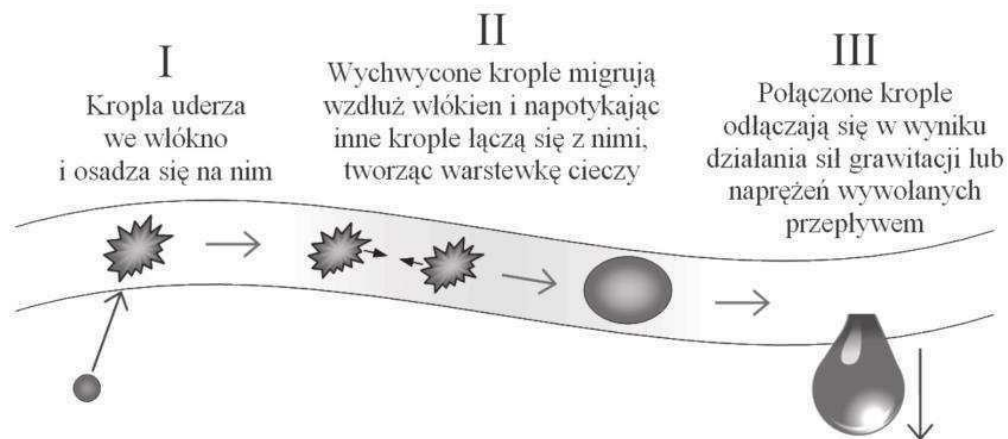
Drugi typ separacji oparty jest na wykorzystaniu siły ciężenia i nazywany jest powszechnie opadaniem grawitacyjnym. Cząstki cieczy utrzymują się w gazie, gdy suma sił wyporu oraz oporu gazu jest większa od siły grawitacji oddziaływującej na tę cząstkę. Siła grawitacji skierowana jest w dół, siła wyporu w górę, natomiast siła oporu w kierunku przeciwnym do kierunku opadania cząstki. Wszystkie te siły mają wpływ na graniczną prędkość opadania cząstki. Jeżeli przepływający gaz w kierunku pionowym ma większą prędkość od prędkości granicznej, wtedy opadanie nie zajdzie. Opadanie grawitacyjne opisane jest trzema prawami obowiązującymi w zakresie różnych średnic kropli i liczb Reynoldsa. Prawo Newtona stosuje się dla cząstek większych niż 1000  $\mu\text{m}$ , zakres przejściowy obejmuje krople o rozmiarze od 100 do 1000  $\mu\text{m}$ , a prawo Stokes'a stosowane jest dla kropelek od 3 do 100  $\mu\text{m}$ . Bardzo małe krople cieczy w postaci mgły praktycznie nie oddzielają gazu w procesie grawitacyjnego opadania. Tu zasadne jest stosowanie separacji opartej na koalescencji.

Trzeci typ separacji opiera się na zjawisku koalescencji, czyli łączeni się małych kropelek w większe, które można wytrącić pod wpływem sił masowych. Elementy koalescencyjne wymuszają przepływ gazu wzdłuż krętego toru. Pęd kropelek sprawia, że zderzają się one z innymi kroplami lub elementami koalescencyjnymi tworząc większe krople, które następnie podlegają separacji grawitacyjnej. Zjawisko to wykorzystuje się w elementach separatorów na demisterach statkowych, czy lamelowych.

## Demistery

W przypadku procesu koalescencji przy przepływie przez struktury włókniste istotnym czynnikiem jest zwilżalność powierzchni materiału złoża. W literaturze spotkać można różne opinie na temat wpływu zwilżalności na proces koalescencji. Efektywność procesu rozdzielania była najwyższa przy zastosowaniu materiałów mających średnie wartości kąta zwilżania. Gdy powierzchnia elementu koalescencyjnego była dostatecznie zwilżalna aby umożliwić proces osadzania się kropeł na włóknach i ich dalszego łączenia się w większe krople, lecz nie powinna być bardzo mocno zwilżalna aby zapobiec blokowaniu objętości elementu przez akumulującą się ciecz fazy zdyspergowanej. Krople wody łatwiej wypierają i zastępują olej ze strefy na powierzchni ciała stałego, gdy ma ona własności hydrofilowe. Chropowatość powierzchni włókien jest najważniejszym parametrem wpływającym na koalescencję kropeł dyspersji wtórnych. Najlepsze wyniki rozdzielania otrzymano przy zastosowaniu struktury złożonej z drobnych włókien szklanych z wysoką energią powierzchniową w pierwszej części złoża oraz poprzepłatanych warstw zbudowanych z siatki ze stali nierdzewnej i polipropylenu na wylocie. W przypadku niektórych materiałów wpływ na zwilżalność ich powierzchni może mieć adsorpcja różnych substancji obecnych w rozdzielanych cieczach, co może prowadzić do drastycznej redukcji właściwości koalescencyjnych.

Własności powierzchni w sposób ilościowy można opisać przy użyciu kąta zwilżania lub wartości energii powierzchniowej. Dobre zwilżanie ciała stałego przez ciecz odpowiada kątowi zwilżania  $0^\circ$  i wysokim wartościom energii powierzchniowej (np. szkło, ceramika, stal). Z kolei brak zwilżania powierzchni odpowiada kątowi kontaktu kropli z powierzchnią większym od  $90^\circ$  (niskie wartości energii powierzchniowej, np. politetrafluoroetylen, polipropylen). Zależność wiążąca napięcie powierzchniowe i międzyfazowe z kątem jaki tworzy kropla zanurzone w drugiej cieczy na powierzchni ciała stałego opisuje równanie Younga. Istotą pracy warstw koalescencyjnych jest efektywne wychwycenie kropełek fazy rozproszonej, które następnie łączą się w warstewkę cieczy na elemencie wypełnienia (np. włóknie). W ostatniej fazie procesu wypływając z warstwy koalescencyjnej ulegają wtórnemu rozpadowi na duże krople.



Rys. Trzy etapy pracy wkładu koalescencyjnego

Zjawisko koalescencji można opisać rozpatrując mechanizm łączenia kropeł oleju z powierzchnią płaską utworzoną przez tę samą ciecz co krople wyodrębnione.

Łączenie kropeł odbywa się w następujących etapach:

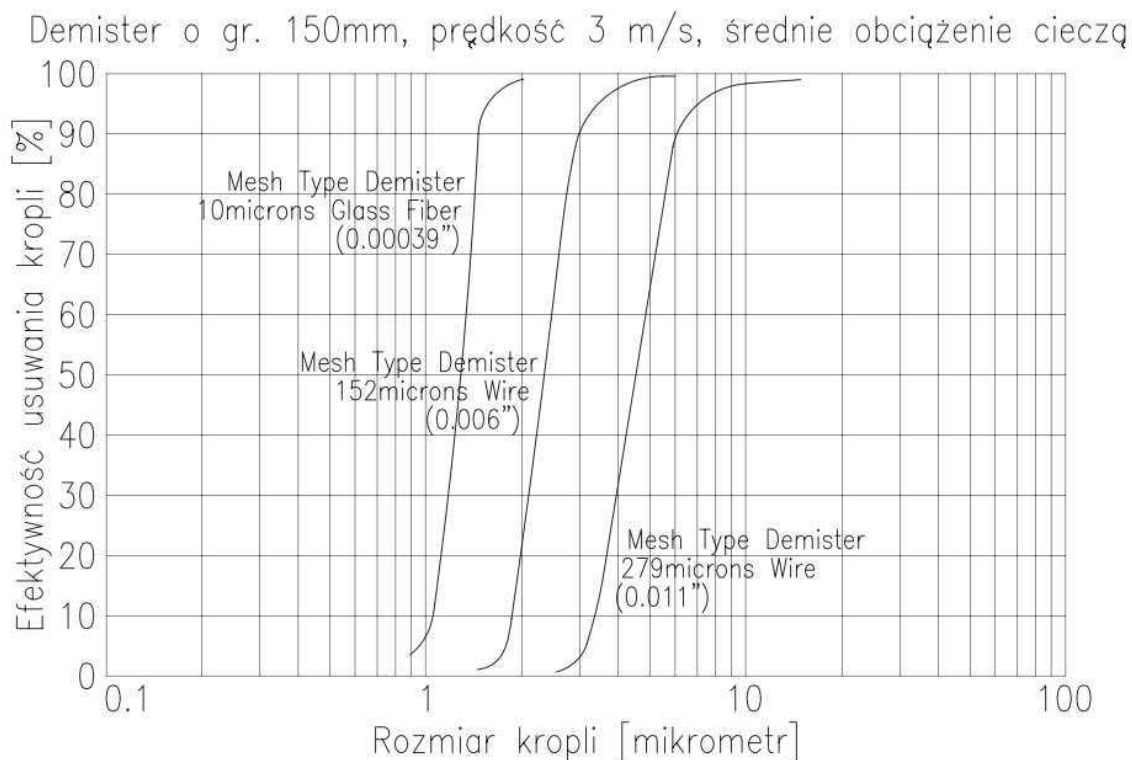
1. Kropla podchodzi do powierzchni międzyfazowej, w wyniku czego następuje deformacja zarówno kropli, jak i powierzchni międzyfazowej.
2. Występują drgania kropli w przestrzeni międzyfazowej.
3. Tworzy się ciągły film pomiędzy kroplą a jej fazą ciągłą o dużej masie.
4. Następuje wyciekanie filmu wraz z jego rozerwaniem i usunięciem (początek właściwego procesu koalescencji).
5. Następuje przeniesienie masy kropli do jej fazy ciągłej o dużej masie.

Okres inicjujący koalescencję w powyższym mechanizmie łączenia, zależy od momentu zbliżenia się kropli do chwili wyciekania filmu. Na okres łączenia kropeł decydujący wpływ ma różnica gęstości, wielkość kropli oraz napięcie międzyfazowe

W celu zwiększenia efektywności separacji zwykle stosuje się demistry typu knitted mesh (siatkowy), które charakteryzują się dużą zdolnością separacji kropeł cieczy z gazu. Rozwiązanie z zastosowaniem demistera jest stosunkowo tanie oraz należy do prostych w wykonaniu. Podstawowe wytyczne montażowe demistera pokazane są na rysunku 3. Demister typu knitted mesh zwykle wykonuje się w postaci plecionej siatki ze stali nierdzewnej o średnicy rdzenia (drutu) 0,152 mm (0,006") lub 0,279 mm (0,011"), z siatki plastikowej o średnicy włókna 0,0203 mm (0,0008"), lub też, z włókna szklanego o średnicy rdzenia 0,01 mm (0,00039").



Porównanie sprawności demisterów typu knitted mesh przedstawia wykres 1. Demister taki zwykle wykonuje się o grubości 150 mm (6"). Efektywność demistera zależy od kilku parametrów: jego grubości, powierzchni właściwej oraz średnicy rdzenia włókna (drułu).



Wykres 1. Sprawności demisterów.

Demistery siatkowe wykonane ze stali nierdzewnej najczęściej stosuje się o gęstości 144 kg/m<sup>3</sup>. Demistera nie powinno się stosować w przypadku, gdy istnieje możliwość wydzielenia się ciała stałego z przepływającego gazu, na przykład wosku, który mógłby go zapchać ograniczając przepływ gazu i znacząco zwiększyć spadek ciśnienia. Demister siatkowy instaluje się zarówno w pozycji poziomej jak i pionowej, częściej jednak robi się to w pozycji poziomej. Dla małych średnic demistera stosuje się pod nim ruszt krzyżowy natomiast przy dużych średnicach ruszty kratowe. Innym rozwiązaniem konstrukcyjnym demistera jest demister typu vane (lamelowy). Rozwiązanie to jest bardziej skomplikowane od knitted mesh. Wymaga instalacji pionowej demistera oraz odprowadzenia cieczy przewodem rurowym do dna zbiornika. Zasada separacji kropli oparta jest w nim na zjawisku sił bezwładności. Demistery typu vane usuwają krople >40 μm z wydajnością 99,9%, usuwanie mniejszych kropli (20 μm) odbywa się z mniejszą wydajnością równą 90%. Demister ten ma dużą zaletę w porównaniu z demisterem typu knitted mesh, ponieważ nie jest tak bardzo wrażliwy na zapchanie ciałami stałymi. Używając tego rodzaju demistera, zmniejszymy średnicę separatora, jednak nie będziemy w stanie zatrzymać

bardzo małych kropeł (10  $\mu\text{m}$ ), które bez problemu zatrzymuje demister siatkowy. Czasami stosuje się demister knitted mesh (siatkowy) łącznie z demisterem typu vane. Takie rozwiązanie jest kosztowne, ale jest też i bardzo efektywne. Pakiety obu demisterów ułożone są poziomo i ściśle przylegają do siebie. Pierwszą warstwą przez którą przepływa gaz jest zawsze demister typu knitted mesh. Średnica separatora jest tak dobrana by znajdujący się na spodzie demister siatkowy był zalewany przez koalescującą ciecz, a większe krople porywane z jego powierzchni przez gaz separowane na demisterze typu vane. Poprawnie zaprojektowany separator wyposażony w demister nie powinien przekraczać prędkości przepływu gazu zgodnie z przedstawionymi parametrami w tabeli 1. (współczynnik K jest opisany w rozdziale Obliczenia 0D)

Typ separatora	długość/wysokość [mm]	stała empiryczna K [m/s]
Pionowy	1 500	0,037 do 0,073
	3 000	0,055 do 0,107
Poziomy	3 000	0,12 do 0,15
	pozostałe	$0,12 \text{ do } 0,15 \cdot (L/3,05)^{0,56}$
Kulisty	wszystkie	0,05 do 0,11

Tabela1. Dobór stałej K w modelu 0D.

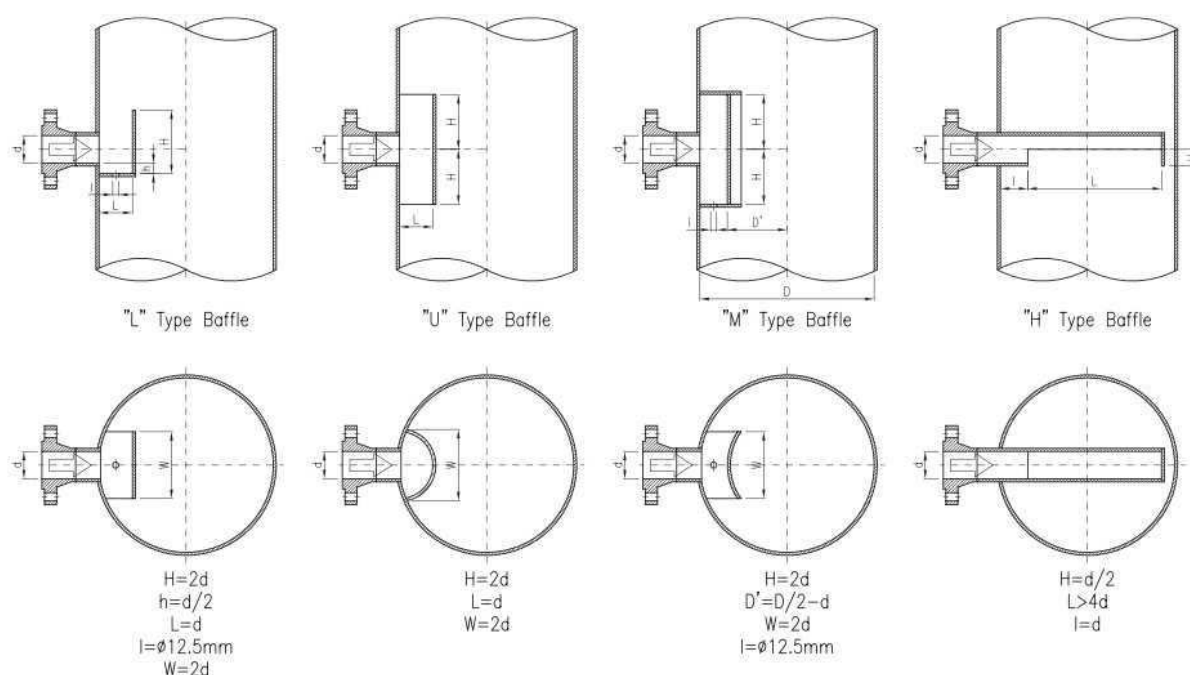
## Divertery

Budowa separatora oparta jest o konstrukcję zbiornika wyposażonego w elementy wlotowe, przegrody, demistery i łamacze wirów e zależności od charakteru urządzenia mogą występować osobno lub łącznie w różnych konfiguracjach.

Element wlotowy (diverter, inlet device) stanowi pierwszą sekcję rozdziału cieczy i gazu w separatorze. Jego zadanie polega na rozbiciu strugi wpadającej do aparatu oraz redukcji jej pędu. Wyróżnia się divertery w postaci różnych rodzajów przegród, cyklonów półrury czy dyfuzorów łopatkowych. Najprostszymi urządzeniami wlotowymi stosowanymi w separatorach są przegrody i tzw. półrury. Elementy te są stosunkowo mało efektywne do rozdziału gaz/ciecz, lecz dosyć często stosowane ze względu na ich prostą konstrukcję i niską cenę. Do bardziej skomplikowanych

urządzeń zalicza się cyklony, multi-cyklony oraz różnego rodzaju dyfuzory. Jest wiele rodzajów cyklonów, między innymi cyklony z wlotem stycznym (tangential), spiralnym (spiral) czy osiowym (axial). Z reguły stosuje się je jako osobne urządzenia do oczyszczania. Jako urządzenie wlotowe do separatorów najczęściej stosuje się cyklony z wlotem stycznym i spiralnym.

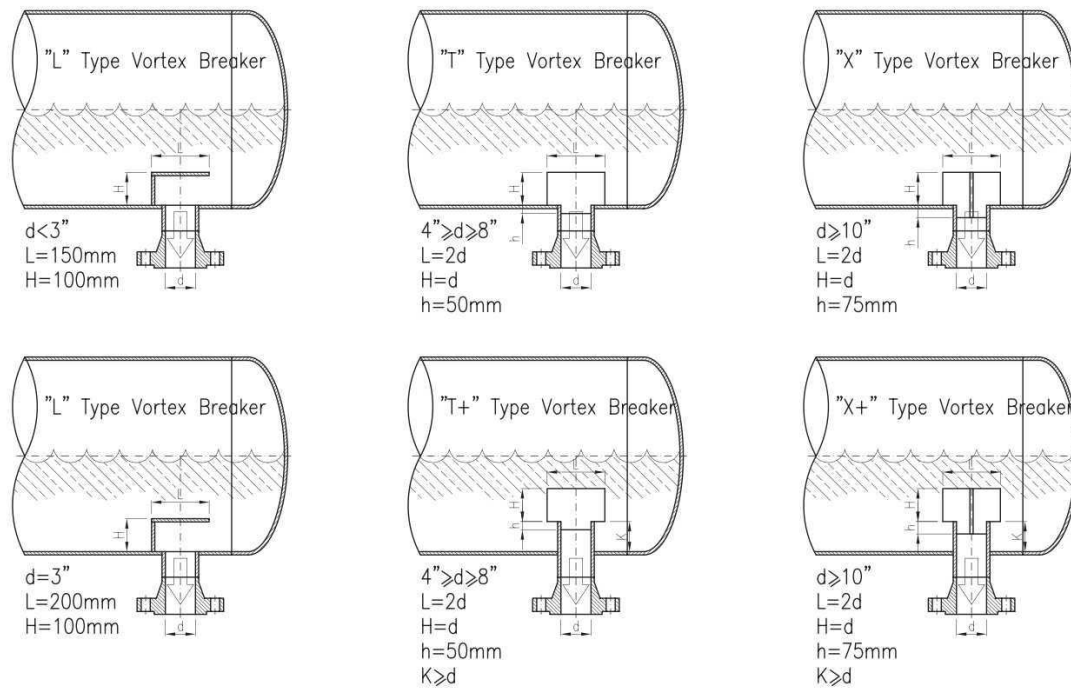
Sprawność separacji kropeł dla samych cyklonów waha się w zakresie od 70 do 85%, dla kropeł o średnicy do 10  $\mu\text{m}$ . Do usuwania kropeł o średnicy do 5  $\mu\text{m}$  wykorzystywane są multicyklony. Multicyklony są układem połączonych ze sobą pojedynczych cyklonów o małych wymiarach, zwykle o efektywności powyżej 85%.



Rys. Popularne rozwiązania konstrukcyjne diverterów.

## Elementy tłumiące wiry

W celu zapobiegania tworzeniu się wirów w króćcach wylotowych cieczy montuje się tzw. łamacze wirów. Tworzący się wir mógłby doprowadzić do przedostania się gazu do króćca odpływowego cieczy. Standardowe rozwiązania konstrukcyjne łamaczy wirów przedstawia rysunek 4. Przegrody w separatorach stosowane są najczęściej w zbiornikach poziomych do zapobiegania tworzenia się fal i ich rozprzestrzenianiu się w separatorze. Rozprzestrzeniające się fale zakłócają proces separacji i powodują wahania poziomów cieczy. Wykonane są zwykle z płyty perforowanej i umieszczone prostopadle do przepływu cieczy.



Rys. Konstrukcje łamaczy wirów.

## Obliczenia 0D

Podstawowym prawem opisującym drugi grawitacyjny typ separacji jest prawo Newtona. Ma ono zastosowanie w przypadku względnie dużych kropli większych niż 1000  $\mu\text{m}$ . Krople cieczy oddzielające się od fazy gazowej w wyniku oddziaływania grawitacji można opisać równaniem powstałym z bilansu sił oporu i ciężenia wyznaczając tzw. prędkość graniczną opadania cząstek. Krople te opadają, gdy siły grawitacji działające na krople są większe niż siła oporu przepływającego gazu wokół kropli

$$V_T = \sqrt{\frac{4g(\rho_l - \rho_g)D}{3\rho_g C}}$$

Gdzie  $V_T$  prędkości graniczna opadania cząstek lub kropli,  $\rho_{l,g}$  gęstość cieczy, gazu,  $D$  średnica kropli,  $C$  współczynnik oporu. W zakresie liczb Reynoldsa powyżej 500 współczynnik oporu  $C$  wynosi 0.44. Górną granicą prawa Newtona jest rozmiar kropli. Drugim ograniczeniem jest liczba Reynoldsa, która nie może przekroczyć  $2e-5$ . Dla liczb Reynoldsa w zakresie od 500 do 2 stosuje się zmodyfikowaną zależność i w tym przypadku prędkość graniczną oblicza się z równania:

$$V_T = \frac{3.54g^{0.71}(\rho_l - \rho_g)^{0.71} D^{1.14}}{\rho_g g^{0.29} \mu^{0.43}}$$

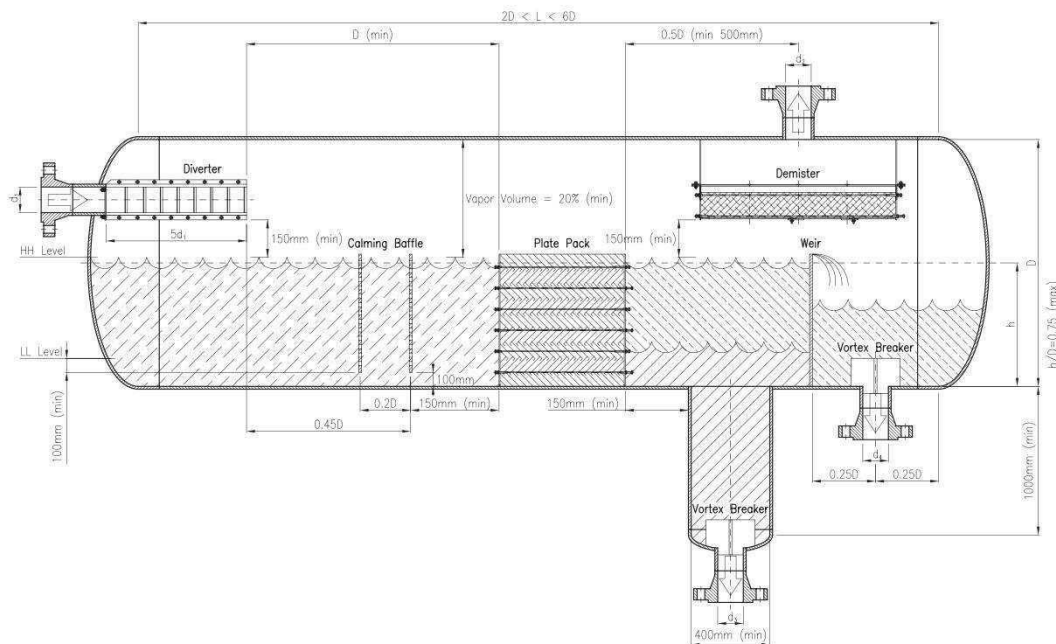
Separatory wyposażone w demister wymiaruje się na podstawie równania do obliczeń prędkości krytycznej oraz empirycznego równania Soundersa-Browna

$$\dot{m}_g = C \sqrt{\rho_g (\rho_l - \rho_g)}$$

Gdzie  $\dot{m}_g$  jest maksymalnym dopuszczalnym masowym natężeniem przepływu pozwalającym na oddzielenie kropeł o średnicy D.

Równania te pozwalają określić przekrój poprzeczny demistera, który między innymi będzie decydował o minimalnej wymaganej średnicy separatora.

Wartość stałej C zależy od wielu czynników jak rodzaj demistera (knitted mesh, vane type). W przypadku prostego separatora wyposażonego w demister siatkowy można posłużyć się normą API Spec12J Specification for Oil and Gas Separators. Separatory poziome mogą mieć dowolną długość jednak stosunek ich długości (od szwu do szwu) do średnicy zwykle jest w przedziale od 2:1 do 6:1. Separatory pracujące przy wyższych ciśnieniach ze względów ekonomicznych projektuje się bardziej smukłe.



Rys. Podstawowe zależności przy konstrukcji separatora poziomego

## Obliczenia 3D

Projektując separator modelami 0D uzyskujemy podstawowe parametry separatora, które mogą następnie być poddane optymalizacji używając zaawansowanych metod 3D jak numeryczna mechanika płynów CFD. Ze względu na złożoność geometryczną i skalę zjawisk fizycznych przed finalnym cyklem projektowym 3D zasadne jest zbudowanie submodeli obliczeniowych najważniejszych składników separatora jak demister czy divider.

Równanie ciągłości można zapisać w postaci

$$\partial_t(\rho) + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0,$$

z którego wynika, że gęstość  $\rho [kg/m^3]$  staje się podstawową zmienną modelu numerycznego. Oczywiście nie oznacza to, iż nie będzie można w pewnych sformułowaniach zastąpić gęstość mieszaniny ciśnieniem mieszaniny. Podstawowym wektorem zmiennych zachowawczych będzie wektor

$$\mathbf{U} = \{\rho, \rho\vec{v}, \rho e\}$$

określający zachowawcze zmienne -- niewiadome modelu .

Zakładamy, że strumień pędu zawiera część odwracalną (spężystą) w postaci ciśnienia termodynamicznego  $p$  oraz szereg części dyssypatywnych, wśród których strumień naprężeń lepkich  $\bar{\tau}$  i strumień turbulentny Reynoldsa  $\bar{r}$  należą do najważniejszych :

$$\bar{t} = -p\bar{I} + \bar{\tau} + \bar{r} + \bar{\tau}^{\text{dyf}} + \bar{\tau}^{\text{rad}} + \bar{\tau}^{\text{trans}} = -p\bar{I} + \bar{\tau}^{\text{ca}^3\text{kowite}}.$$

Pozostałe wkłady do strumienia pędu biorą się z: dyfuzji  $\bar{\tau}^{\text{dyf}}$ , radiacji  $\bar{\tau}^{\text{rad}}$  i transpiracji  $\bar{\tau}^{\text{trans}}$ . Dzieląc strumienie na część konwektywną (pochodne pierwszego rzędu) i część dyfuzyjną (pochodne drugiego rzędu) ewolucję pędu zapisujemy w następującej konserwatywnej postaci:

$$\partial_t(\rho\vec{v}) + \text{div}(\rho\vec{v} \otimes \vec{v} + p\bar{I}) = \text{div}\left(\bar{\tau}^{\text{ca}^3\text{kowite}}\right) + \rho\vec{b},$$

lub we współrzędnych kartezjańskich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}^{\text{całkowite}}) + \rho b_i.$$

Z powyższych równań bilansu pędu wynika, że "naprężeniowy" warunek brzegowy, stawiany na całkowity strumień pędu może mieć postać

$$\vec{\tau}^{\hat{a}} = \bar{p} \vec{n},$$

gdzie  $\vec{\tau}^{\hat{a}}$  wektor zadanych sił brzegowych, który w szczególnym przypadku może być równy zadanemu ciśnieniu  $\vec{\tau}^{\hat{a}} = \bar{p} \vec{n}$ , gdzie  $\vec{n}$  wektor jednostkowy normalny do powierzchni.

Ponieważ zakładamy, iż wszystkie składniki płynu posiadają tę samą prędkość  $\vec{v}$ , oraz te same gradienty przestrzenne, to spodziewanym wyrażeniem na tensor naprężeń lepkich jest klasyczna formuła Stokesa

$$\bar{\tau} = 2\mu \left[ \bar{d} - \frac{1}{3} \text{div}(\vec{v}) \bar{I} \right] + \mu' \text{div}(\vec{v}) \bar{I},$$

w której prędkość deformacji

$$\bar{d} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \vec{v} + \vec{v} \otimes \nabla) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = d_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j,$$

zaś  $\mu [kg/m s]$  jest lepkością dynamiczną,  $\mu'$  jest współczynnikiem drugiej lepkości, zwykle równy zero [51].

Równania transportu wymagane dla modelu  $k - \varepsilon$  [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \text{div}(\rho k \vec{v}) = \text{div} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \nabla k \right) + S_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \text{div}(\rho \varepsilon \vec{v}) = \text{div} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + S_\varepsilon,$$

mają taką samą postać zachowawczą jak i inne równania transportu. Człony źródłowe  $S_k, S_\varepsilon$  są jednak nie tylko zależne od wektora zmiennych zachowawczych lecz również od jego przestrzennych gradientów:



$$S_k = \rho(r_{ij}v_{i,j} - \varepsilon) - \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i},$$

$$S_\varepsilon = \rho \frac{\varepsilon}{k} \left( C_1 r_{ij} v_{i,j} - C_2 \varepsilon \frac{\mu_t}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right).$$

Pięć stałych modelu  $k - \varepsilon$  tzn.  $\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_\mu = 0.09, C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$  nie zależą od rodzaju przepływu (stacjonarny, niestacjonarny), rodzaju płynu (ściśliwy, nieściśliwy).

Równania bilansu energii całkowitej (wewnętrznej + kinetycznej) w homogenicznym modelu płynu składa się z czasowych zmian wielkości bilansowanej, strumieni tej wielkości opuszczających (lub wnikających do) obszaru kontrolnego oraz ze źródeł

$$\partial_t(\rho e) + \text{div}(\rho e \vec{v}) = \text{div}(\vec{q} + \vec{q}_t + \vec{t} \vec{v} + \vec{q}_D + \vec{q}_{rad}) + \rho r + \rho \vec{b} \cdot \vec{v}$$

gdzie:  $e = \varepsilon + \vec{v}^2/2$  suma energii wewnętrznej i kinetycznej,  $\vec{q}$  i  $\vec{q}_t$  to molekularny i turbulentny strumień ciepła,  $\vec{t} \vec{v}$  --mechaniczny strumień ciepła,  $q_D, q_{rad}$  to dyfuzyjne i radiacyjne strumienie ciepła, zaś

$$h_k = \varepsilon_k + \frac{p_k}{\rho_k},$$

to entalpia składnika odniesiona na jednostkę masy składnika. Ponieważ całkowity strumień pędu  $\vec{t} = -p\vec{I} + \vec{\tau}^c$  dzieli się na konwekcyjną część odwracalną ( $p\vec{I}$ , pochodne pierwszego rzędu) i mechaniczną część dyfuzyjną, to człon mechanicznego strumienia pędu  $-p\vec{I}\vec{v} = -p\vec{v}$  przenosi się na lewą stronę

$$\partial_t(\rho e) + \text{div} \left[ \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \rho \vec{v} \right] = \text{div} \left( \vec{q} + \vec{q}_t + \vec{\tau}^c \vec{v} + \vec{q}_D + \vec{q}_{rad} \right) + S_e, \quad )$$

W przypadku entalpowego sformułowania wykorzystuje się związek

$$\rho e = \rho h + \rho \frac{\vec{v}^2}{2} - p.$$

### Obliczenia 3D demistera

Demister najkorzystniej z punktu widzenia CFD potraktować jako materiał porowaty. Ośrodek porowaty opisany jest poprzez człon źródłowy dodany do standardowego równania pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{w}) + \nabla \cdot (\rho \vec{w} \vec{w}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}}) + \rho \vec{g} + \vec{F}$$

gdzie

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left[ (\nabla \vec{w} + \nabla \vec{w}^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{w} I \right].$$

Człon  $S_i$  składa się z dwóch części: straty lepkościowe na pokonanie oporów przepływu przez ośrodek porowaty (klasyczne prawo Darcy, pierwsza część prawej strony równania (6)) i straty wewnętrzne (druga część prawej strony równania (6)):

$$S_i = - \left( \sum_{j=1}^3 D_{ij} \mu w_j + \sum_{j=1}^3 C_{ij} \frac{1}{2} \rho |w| w_j \right)$$

gdzie  $S_i$  jest członem źródłowym równania pędu ( $i = x, y$  lub  $z$ ),  $|w|$  jest modulem prędkości a  $D$  i  $C$  są danymi macierzami. Ubytek momentu związany jest z gradientem ciśnienia w medium porowatym i generuje spadek ciśnienia proporcjonalny do prędkości przepływu. W przypadku homogenicznych materiałów porowatych mamy:

$$S_i = - \left( \frac{\mu}{\alpha} w_i + C_2 \frac{1}{2} \rho |w| w_i \right),$$

gdzie  $\alpha$  jest przepuszczalnością, a  $C_2$  jest współczynnikiem oporu wewnętrznego, czyli  $D$  i  $C$  są macierzami diagonalnymi z  $1/\alpha$  i  $C_2$  odpowiednio na przekątnych i zerami dla reszty elementów macierzy

W przepływach laminarnych przez materiały porowate, spadek ciśnienia jest wprost proporcjonalny do prędkości i stała  $C_2$  może być pominięta. Ignorując zjawiska konwekcyjne i dyfuzyjne, model przepływu w materiałach porowatych redukuje się do prawa Darcy:

$$\nabla p = -\frac{\mu}{\alpha} \vec{w}.$$

Spadek ciśnienia liczony jest więc dla każdego wymiaru ( $x, y, z$ ) ośrodka porowatego zależności:

$$\Delta p_x = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{\alpha_{xj}} w_j + \Delta n_x$$

$$\Delta p_y = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{\alpha_{yj}} w_j + \Delta n_y$$

$$\Delta p_z = \sum_{j=1}^3 \frac{\mu}{\alpha_{zj}} w_j + \Delta n_z$$

gdzie  $1/\alpha_{ij}$  są składnikami macierzy  $D$ ,  $w_j$  są składowymi prędkościami w kierunkach  $x, y, z$ ,  $\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$  oznaczają grubość ośrodka porowatego w kierunku  $x, y$  i  $z$ .

Przy wyższych prędkościach przepływu, stała  $C_2$  wprowadza poprawkę na straty generowane oporem wewnętrznym. Stała ta może być rozumiana jako współczynnik straty odniesiony do długości wzdłuż kierunku przepływu.

W przypadku płytek perforowanych (substytut materiały porowatego) być może będzie można pominąć człon przepuszczalny i użyć tylko członu strat wewnętrznych, co daje nam równania:

$$\nabla p = -\sum_{j=1}^3 C_{2ij} \left( \frac{1}{2} \rho w_j |w| \right)$$

lub pisząc jako spadki ciśnienia w kierunku  $x, y, z$ :

$$\Delta p_x \approx \sum_{j=1}^3 C_{2xj} \Delta n_x \frac{1}{2} \rho w_j |w|$$

$$\Delta p_y \approx \sum_{j=1}^3 C_{2yj} \Delta n_y \frac{1}{2} \rho w_j |w|$$

$$\Delta p_z \approx \sum_{j=1}^3 C_{2zj} \Delta n_z \frac{1}{2} \rho w_j |w|$$

Istotą zastępowania płyt perforowanych materiałem porowatym jest wyznaczenie charakterystyk zastępczego materiału porowatego. W kodzie *CFD* ośrodek porowaty opisywany jest trzema parametrami – skalarnym i dwoma wektorowymi. Skalarem jest porowatość ośrodka czyli w przypadku płyt perforowanych stosunek powierzchni otworów do całkowitej powierzchni płyty, wektorami są przepuszczalność  $\alpha$  i współczynnik oporu wewnętrznego  $C_2$ .

Do wyznaczenia parametrów  $\alpha$  i  $C_2$  konieczne jest wyznaczenie tzw. charakterystyki zastępczego ośrodka porowatego czyli spadku ciśnienia na płycie perforowanej w funkcji prędkości przepływu.

Do tego celu stosuje się równanie (7), ponieważ człon źródłowy ma wymiar dodatkowego spadku ciśnienia generowanego przez perforowaną płytę podzielonego przez grubość płyty, czyli

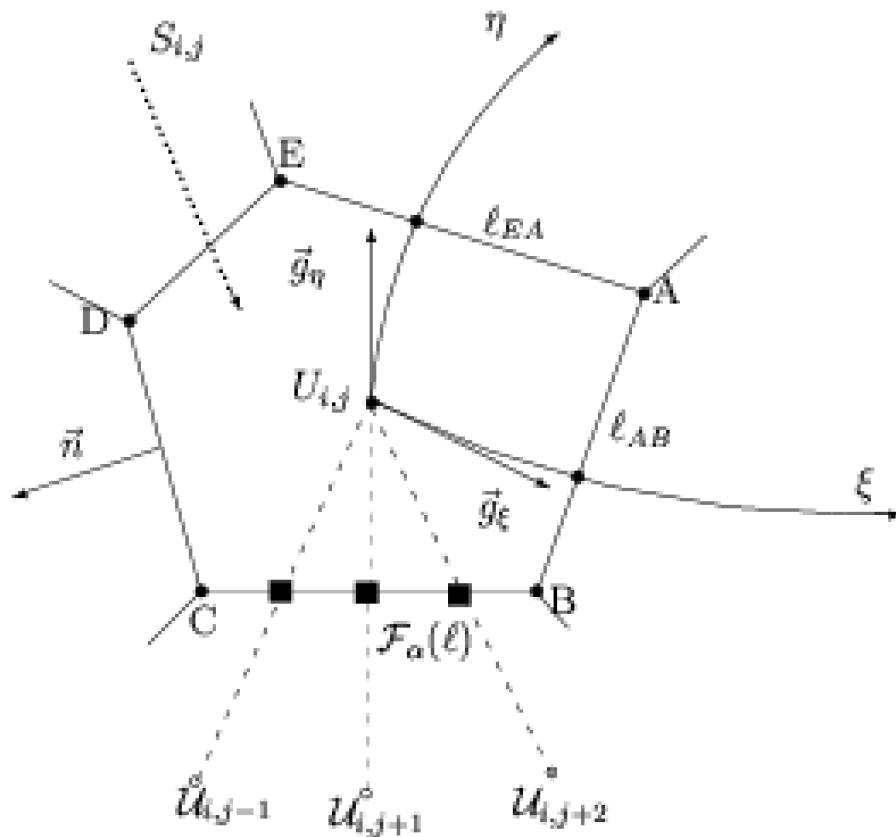
$$\frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\mu}{\alpha} w + \frac{1}{2} C_2 w^2$$

## Metodologia obliczeniowa

Każdemu węzłowi nieregularnej siatki, zagęszczającej się w obszarze silnych gradientów, przypisana zostaje pewna objętość skończona. W przypadku dwuwymiarowym powstaje komórka skończona niekoniecznie będąca wielokątem wypukłym. Rozpatrzmy typową komórkę indeksowaną  $(ij)$  w przypadku siatki strukturalnej lub  $(m)$  w przypadku siatki dowolnej.

Typowa objętość skończona zazwyczaj posiada jeden węzeł oznaczany  $U_{i,j}$  lub, ogólnie  $U_m$ ,  $m=1,\dots,N$ . Krzywoliniowy układ współrzędnych  $(\xi, \eta)$  posiada bazę  $\vec{g}_\xi$ ,  $\vec{g}_\eta$ . Strumienie (konwekcyjne i dyfuzyjne) obliczane są na bokach objętości skończonej w punktach Gaussa oznaczonych  $+,+,+$ . Boki oddzielające od sąsiednich objętości skończonych są albo liniami prostymi (2D) lub płaszczyznami (3D), stąd wektor normalny

$\vec{n}$  ma wzdłuż  $\ell_{AB}$  stałe składowe. Przy takich uproszczeniach powierzchnie  $s_{i,j}$  oblicza się wg prostych formuł.



Rys. Objętość skończona

Brzeg komórki składa się na ogół z odcinków prostych orientowanych na zewnątrz wektorem  $\vec{n}$ , parametryzowanych krzywą  $\ell$ . Pole komórki wynosi:

$$s_{i,j} = \iint_s dA = \iint_s J(\eta, \xi) d\eta d\xi,$$

gdzie  $J$  jest jacobianem (3.19). Całkując zachowawczy układ równań ( $\vec{F}^v \equiv 0$ ) w obszarze przypisanym węzłowi  $(i, j)$  mamy

$$\iint_s [\partial_t \mathbf{U} + \text{div} \vec{F}^c = \mathbf{S}] dA,$$

a po uwzględnieniu niezmienniczości  $s_{i,j}$  w czasie oraz dwuwymiarowej wersji twierdzenia Greena mamy

$$\partial_t \iint_s \mathbf{U}(\xi, \eta) dA + \oint_{\partial s} \vec{F} \cdot \vec{n} dl = \iint_s \mathbf{S} dA$$

Jak wynika z rekonstrukcji, pole  $U(\eta, \xi)$  nie jest stałe w  $s_{i,j}$ , jednakże na tym etapie rozumowania zakłada się, że

$$\iint_{s_{i,j}} U(\eta, \xi) dA \cong U_{i,j} s_{i,j}.$$

$U_{i,j}$  reprezentuje średnią wartość w komórce. Te założenie jest w ogólności sprzeczne z zrekonstruowanym polem  $U(\xi, \eta)$ , którego wartość  $U(\ell)$  na brzegu  $\ell$  potrzebna jest do obliczania  $\oint \vec{F}^c \cdot \vec{n} dl$ .

Ważnym jest, iż strumień konwekcyjny  $\vec{F}^c$  w całości wyrażany jest tylko poprzez  $U$  i jej nieliniowe funkcje -- pozwala to, w metodzie objętości skończonych, obejść zagadnienia dyskretyzacji pochodnej  $\text{div} \vec{F}^c$  wewnątrz  $s_{i,j}$ . Na brzegu  $\ell$  jest on opisany jako

$$\begin{aligned} \vec{F}(\ell) &= \left\{ \begin{array}{l} \rho \vec{v} \\ \rho \vec{v} \otimes \vec{v} + p \vec{I} \\ \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{v} \\ \rho Y_i \vec{v} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \rho v^\alpha \\ \rho v^\alpha v^\beta \bar{g}^\beta + p g^{\alpha\beta} \bar{g}_\beta \\ \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) v^\alpha \\ \rho Y_i v^\alpha \end{array} \right\} \otimes \bar{g}_\alpha = \\ &= \mathbf{F}^\alpha \otimes \bar{g}_\alpha = \vec{F}_{(\alpha)} \otimes \vec{e}_{(\alpha)}, \end{aligned}$$

gdzie  $\alpha = \xi, \eta$ , a strumienie  $\mathbf{F}^\alpha$  oparte są o kontrawariantne składowe prędkości  $\vec{v} = v^\alpha \bar{g}_\alpha$  obliczane w krzywoliniowym układzie  $(\xi, \eta)$ . Natomiast  $\mathbf{F}_{(\alpha)} = (\mathbf{F}_\xi, \mathbf{F}_\eta)$  są fizycznymi składowymi odniesionymi do bazy  $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ . Oblicza się je jako

$$\mathbf{F}_\xi = \mathbf{F} \xi_x + \mathbf{G} \xi_y = \left\{ \begin{array}{l} \rho U \\ \rho U u + p \xi_x \\ \rho U v \\ \rho \left( e + \frac{p}{\rho} \right) U \\ \rho Y_i U \end{array} \right\}, \quad \mathbf{F}_\eta = \mathbf{F} \eta_x + \mathbf{G} \eta_y,$$

gdzie  $\vec{v} = U \vec{e}_\xi + V \vec{e}_\eta = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y$  zaś  $U = \xi_x u + \xi_y v, V = \eta_x u + \eta_y v$  są składowymi fizycznymi w bazie  $\xi, \eta$ .

Jeśli wektor normalny

$$\vec{n}(\ell) = n^\alpha \vec{g}_\alpha = n_{(\alpha)} \vec{e}_{(\alpha)} = n_\xi \vec{e}_\xi + n_\eta \vec{e}_\eta,$$

ma składowe fizyczne  $n_{(\alpha)}$  to

$$\vec{F}^c \cdot \vec{n} = (\mathbf{F}^\alpha \otimes \vec{g}_\alpha) (n_\beta \vec{g}^\beta) = F^\alpha n_\alpha = F_{(\alpha)} n_{(\alpha)}.$$

Układ (3.34) sprowadza się teraz do równania częściowo dyskretnego względem współrzędnych przestrzennych

$$s_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{i,j} + \oint_\ell (\mathbf{F}_\xi n_{(\xi)} + \mathbf{F}_\eta n_{(\eta)}) d\ell = s_{i,j} \mathbf{S}_{i,j},$$

które po dyskretyzacji czasowej i obliczenia strumienia na brzegu  $\ell$ , prowadzi do algebraicznego nieliniowego równania na  $\mathbf{U}_{i,j}$  sprzężonego z sąsiadami typu  $\mathbf{U}_{i+1,j}, \mathbf{U}_{i+2,j}$  itd.

Charakterystyczną cechą metody objętości skończonych jest to, iż rozwinięta jest ona tylko w stosunku do części konwekcyjnej strumienia i to głównie tylko w schemacie jawnym. Natomiast schemat niejawny dla strumienia konwekcyjnego preferuje macierzowe sformowanie metody różnic skończonych, co w praktyce oznacza, że dla schematu jawnego stosuje się metodę objętości skończonych, a dla schematu niejawnego metodę różnic skończonych. W literaturze przedmiotu brak jest sformułowania obliczania  $F_\alpha(\ell)$  dla podejścia niejawnego tzn.  $F_{(\alpha)}(\mathbf{U}^{n+1})$ , czyli

$$\underbrace{\iint_s \nabla_\alpha F^\alpha(\mathbf{U}^{n+1}) dA}_{\text{dominuj}\pm\text{cepodej}\text{sciewliteraturze}} = \underbrace{\oint_\ell F_{(\alpha)}(\mathbf{U}_{|\ell}^{n+1}) n(\alpha) d\ell}_{\text{brakwilitaturze}}$$

Prawdopodobnie trudności polegają na nieznanym sposobie wyrażenia  $\mathbf{U}_{|\ell}^{n+1}$  dla kroku  $n+1$  na brzegu  $\ell$  w funkcji  $\mathbf{U}_{|\ell}^n$  i jeszcze innych nieznanymi wielkościami.

W metodzie objętości skończonych obliczenie całki  $\oint \vec{F} \cdot \vec{n} d\ell$  jest głównym zadaniem schematu jawnego. Krzywa brzegowa  $\ell$  składa się, najczęściej, z trzech bloków trójkąta lub czterech boków czworokąta -- rzadziej w obliczeniach spotykany jest pięciokąt, chociaż w każdej siatce niestrukturalnej takie mogą występować. W przypadku siatek strukturalnych



dominuje równoległobok i wtedy z racji tego, że  $U_{i,j}$  znajduje się w środku, strumienie na brzegach oznaczane są indeksem  $1/2$  tzn

$$F_{\xi}^{\ell} = F_{\xi_{i\pm 1/2,j}}, \quad F_{\eta}^{\ell} = F_{\eta_{i,j\pm 1/2}}$$

gdzie minus odnosi się do strumienia na lewym a plus na prawym boku. Pola  $U(\eta, \xi)$  na przykładowej ścianie  $AB$  (rys. 4) oznacza się  $U^R$  i  $U^L$  odpowiednio z prawej i lewej strony.

Podstawowym zadaniem, zwanym zagadnieniem rekonstrukcji, jest wyznaczenie wartości  $U(\ell)^R$  i  $U(\ell)^L$  we wszystkich punktach całkowania Gaussa. Jednym ze sposobów rekonstrukcji  $U^L(\ell)$  jest ekstrapolacja w oparciu o wartości w punktach  $WWW$ ,  $WW$  i w polu  $U(\eta, \xi)$ , tak aby po podstawieniu współrzędnych punktów całkowania Gaussa znajdujących się na krzywej  $\ell$  móc wyrazić  $F(\ell)$ .

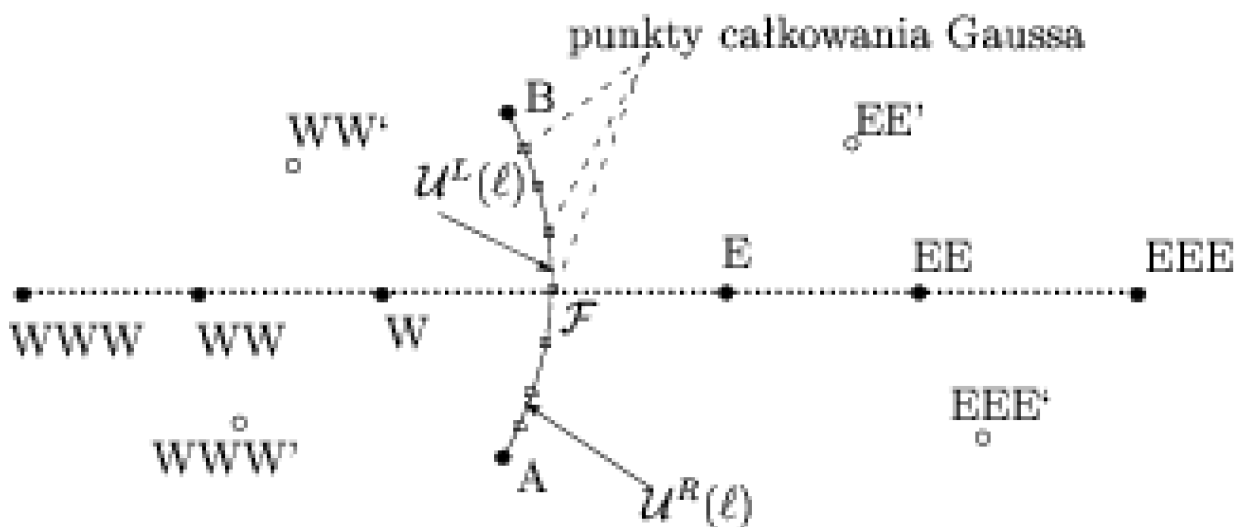


Figure 4: Rozkład zmiennych zachowawczych  $U^L(\ell)$  i  $U^R(\ell)$ , strumieni na typowym bloku komórki kontrolnej. Punkty węzłowe  $E$ ,  $EE$ ,  $EEE$  (East),  $W$ ,  $WW$ ,  $WWW$  (West) symbolicznie oznaczają węzły, w których szukane są dyskretne wartości  $U$ .

Podobnie wyraża się  $U^R(\ell)$ . Oznacza to, iż dla schematu rekonstrukcji przedstawionego na rysunku 4 wartości  $\bar{F}(\ell)$  będą obliczane w oparciu o  $U_{WWW}$ ,  $U_{WW}$ ,  $U_W, \dots, U_{EEE}$ . W ogólności, dla siatek adaptacyjnych

punkty  $WWW, WW$  nie będą znajdować się na jednym kierunku, co musi prowadzić do skomplikowanej rekonstrukcji.

Jak wykazuje dotychczasowa praktyka w przypadku siatek strukturalnych nie zakłada się zmienności  $F_\xi, F_\eta$  wzdłuż  $\ell$  kładąc zawsze wartości w środku odcinka. Wtedy całkowanie upraszcza się np.

$$\int_A^B F_{(\alpha)}(\ell) n_{(\alpha)}(\ell) d\ell = l_{AB} F_{(\alpha)}(\ell_{1/2}) n_{(\alpha)}(\ell_{1/2})$$

gdzie  $\ell_{AB}$  jest długością boku a w oznaczeniach pojawiają się indeksy  $\frac{1}{2}$  oznaczające zarówno połowę boku  $AB$  i często połowę odległości między punktami E i W na rysunku 4.

Obliczenia całki krzywoliniowej upraszczają się dla siatek strukturalnych (rysunek 5), w których linie siatki są lokalnie ortogonalne (body fitted). Wtedy równanie (3.34) przyjmuje postać

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{i,j}(t) + \frac{1}{s_{i,j}} \left[ \bar{F}_{\xi_{i+1/2,j}} - \bar{F}_{\xi_{i-1/2,j}} + \bar{F}_{\eta_{i,j+1/2}} - \bar{F}_{\eta_{i,j-1/2}} \right] = \bar{\mathbf{S}}_{i,j},$$

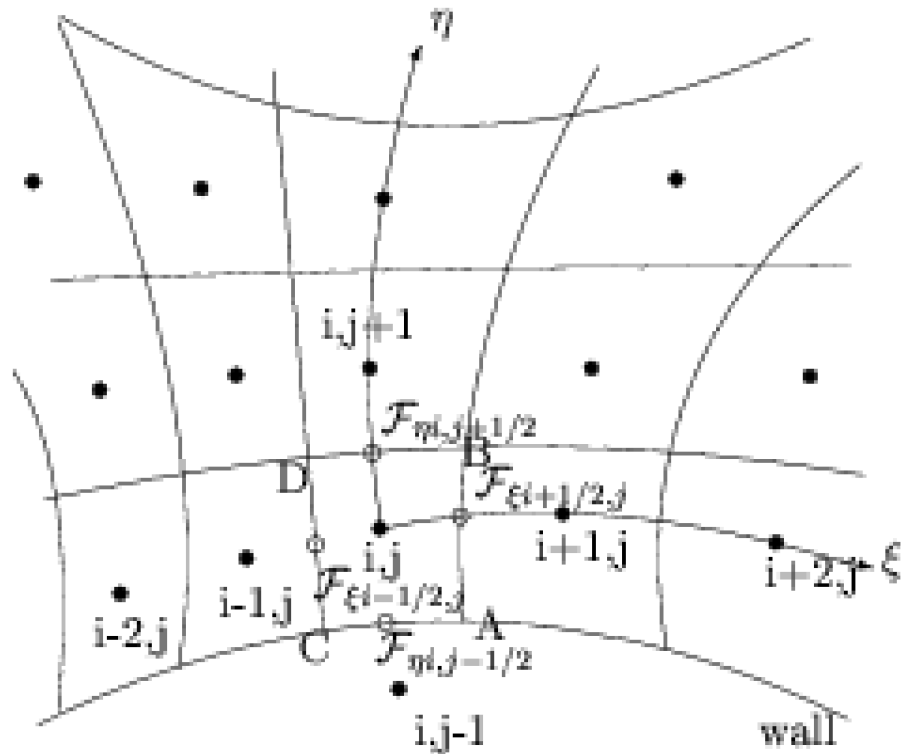
gdzie

$$\mathbf{U}_{i,j} = \frac{1}{s_{i,j}} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \mathbf{U}(\xi, \eta, t) \mathbf{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$\bar{F}_{\xi_{i\pm 1/2,j}} = \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} F_\xi(\mathbf{U}(\xi_{i\pm 1/2,\eta,t})) d\eta,$$

$$\bar{F}_{\eta_{i,j\pm 1/2}} = \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} F_\eta(\mathbf{U}(\eta_{j\pm 1/2,\xi,t})) d\xi,$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{i,j} = \frac{1}{s_{i,j}} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \int_{\eta_{j-1/2}}^{\eta_{j+1/2}} \mathbf{S}(\mathbf{U}(\xi, \eta)) \mathbf{J}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$



Rys. Siatka strukturalna

Całkowanie wzdłuż brzegu objętości skończonej odbywa się najczęściej w kilku punktach Gaussa<sup>1</sup>. Jeśli, jak to pokazano na rysunku 4, są to trzy punkty Gaussa to potrzebna jest rekonstrukcja zarówno strumieni jak i pola zmiennych  $U$  w punktach całkowania. Wystarczy wtedy kwadratowa rekonstrukcja  $U$  np na boku  $AB$ .

$$U(\xi, \eta_{i+1/2}, t) = \bar{U}(\xi_{1/2}, \eta_{1/2}, t) + (\xi^k - \xi_{1/2}) \nabla \bar{U} + \frac{1}{2} (\xi^k - \xi_{1/2}) \mathbf{H}(\xi^k - \xi_{1/2}), \quad k = 1, 1/2, 2$$

opracowana przez Delanaye i Essersa [29], w której  $\mathbf{H}$  jest macierzą opracowaną w cytowanej pracy.

W ogólności, biorąc pod uwagę adaptację siatki, potrzebna jest, podobnie jak to ma miejsce w metodzie elementów skończonych, rekonstrukcja pola  $U(\xi, \eta)$  dla  $\xi, \eta \in [\xi_{-1/2}, \xi_{+1/2}] \times [\eta_{-1/2}, \eta_{+1/2}]$  w całym obszarze objętości skończonej co pozwoli nie tylko otrzymać ściśle wektory  $U^L(\ell)$  i  $U^R(\ell)$  ale również precyzyjnie uwzględnić całkę (3.35) prowadzącą w takim przypadku do powstania macierzy mas tj.  $\mathbf{M} \partial_t U$ .

Zagadnienia optymalnej rekonstrukcji  $U(\xi, \eta)$  zajmują się dwie metody drugiego rzędu o wysokiej rozdzielczości. Są to

- technika upwind TVD (Total Variation Diminishing)
- technika ENO (Essential Non--Oscillatory).

## Technika TVD

Technika TVD posługuje się najczęściej schematem rekonstrukcji MUSCL (Monotic Upstream--centered Scheme for Conservation Laws) [62], który dla siatek strukturalnych (rysunek 5) rekonstruuje wartości na brzegu  $AB \Leftarrow U^R$  i na brzegu  $CD \Leftarrow U^L$  używając wartości wektorów własnych, odpowiedniego jakobianu, określonych w  $U_{i,j}$  oraz wartości  $U$  -- dwóch przed krawędzią np  $AB$  i dwóch za krawędzią -- co daje odcinkami liniową rekonstrukcję. Określona jest ona formułą [91]

$$U_{i-1/2,j}^L = U_{i,j} + S_{\xi i,j}^{-1} \left( \frac{1-\phi}{4} \nabla_{\xi} \overset{\square}{W}_{i,j} + \frac{1+\phi}{4} \Delta_{\xi} \overset{\square}{W}_{i,j} \right),$$

$$U_{i-1/2,j}^R = U_{i,j} + S_{\xi i,j}^{-1} \left( \frac{1-\phi}{4} \Delta_{\xi} \overset{\square}{W}_{i,j} + \frac{1+\phi}{4} \nabla_{\xi} \overset{\square}{W}_{i,j} \right),$$

gdzie van Leer wprowadza szereg złożonych oznaczeń, z których najważniejsze jest nakreślenie tyldą pojedynczą i podwójną, oznaczającą tzw. funkcję ograniczającą, którą najczęściej jest minmod limiters (indeks  $\xi$  lub  $\eta$  oznaczający kierunek tu opuszczamy)

$$\nabla \overset{\square}{W}_{i,j} = \minmod \left( \nabla W_{i,j}, b \Delta W_{i,j} \right),$$

$$\Delta \overset{\square}{W}_{i,j} = \minmod \left( \Delta W_{i,j}, b \nabla W_{i,j} \right),$$

określony następującą formułą

$$\text{minmod}(x, y) = \frac{\text{sign}(x) + \text{sign}(y)}{2} \cdot \min(|x|, |y|),$$

$$b \equiv \frac{3 - \phi}{1 - \phi}$$

W literaturze spotykamy inne funkcje ograniczające, konkurujące z limiterem van Leera (3.51). Są to:

- limiter Chakravarthy--Oshera [18],
- dyfuzyjny limiter Roe'a [88],
- drugi limiter van Leera [62],
- superbee limiter Roe'a [89],
- limiter Davisa [28].

Stosuje się następujące wartości współczynnika  $\phi$  [123]

- $\phi = -1$  pełny schemat pod prąd,
- $\phi = 0$  schemat Fromma,
- $\phi = 1/3$  schemat trzeciego rzędu pod prąd,
- $\phi = 1$  schemat centralny.

W (3.50)  $S_{\xi i,j}$  oznacza macierz wektorów własnych jacobianu  $A_{\xi}$  w punkcie  $(i, j)$  zaś „obrócony” wektor zmiennych  $W_{i,j}$  wynosi

$$\nabla_{\xi} W_{i,j} = (S_{\xi}^{-1} \nabla_{\xi} U)_{i,j} = S_{\xi i,j}^{-1} (U_{i,j} - U_{i-1,j}),$$

$$\Delta_{\xi} W_{i,j} = (S_{\xi}^{-1} \Delta_{\xi} U)_{i,j} = S_{\xi i,j}^{-1} (U_{i+1,j} - U_{i,j}).$$

Podobną postać mają obrócone wektory w kierunku  $\eta$

$$\nabla_{\eta} W_{i,j} = (S_{\eta}^{-1} \nabla_{\eta} U)_{i,j} = S_{\eta i,j}^{-1} (U_{i,j} - U_{i,j-1}),$$

$$\Delta_{\eta} W_{i,j} = (S_{\eta}^{-1} \Delta_{\eta} U)_{i,j} = S_{\eta i,j}^{-1} (U_{i,j+1} - U_{i,j}).$$

Macierze  $S_{\xi}$ ,  $S_{\eta}$  wektorów własnych wynikają z następujących dekompozycji macierzy jacobianów

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi &= \mathbf{A}_\xi^+ + \mathbf{A}_\xi^- = \mathbf{S}_\xi (\Lambda_\xi^+ + \Lambda_\xi^-) \mathbf{S}_\xi^{-1}, \\ \mathbf{B}_\eta &= \mathbf{B}_\eta^+ + \mathbf{B}_\eta^- = \mathbf{S}_\eta (\Lambda_\eta^+ + \Lambda_\eta^-) \mathbf{S}_\eta^{-1}. \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\xi &= \mathbf{A}_{\xi_x} + \mathbf{B}_{\xi_y}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{U}}, \\ \mathbf{B}_\eta &= \mathbf{A}_{\eta_x} + \mathbf{B}_{\eta_y}, \quad \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{U}}, \end{aligned}$$

są macierzami jacobianu części konwekcyjnej, zaś  $\Lambda_\xi^\pm$ ,  $\Lambda_\eta^\pm$  są diagonalnymi macierzami wartości własnych, rozdzielonymi na wartości własne dodatnie i ujemne.

Mając  $\mathbf{U}^L, \mathbf{U}^R$  obliczone po lewej i prawej stronie wzdłuż brzegu całej komórki obliczeniowej, należy w następnym kroku obliczyć numeryczne wartości strumieni  $\mathbf{F}_\xi, \mathbf{F}_\eta$ . W technice „pod prąd” stosowane są następujące schematy numeryczne obliczania strumieni (Chmielniak [23], str 372):

- dekompozycja prosta strumienia (rys. 5)

$$\mathbf{F}_{\xi_{i+1/2,j}} = \mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}_{i+1/2}^L) + \mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}_{i+1/2}^R),$$

- Godunowa

$$\mathbf{F}_{\xi_{i+1/2,j}} = \mathbf{F}_\xi[\mathbf{U}^{Riemann}(\mathbf{U}^L, \mathbf{U}^R)]$$

- Roe`a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\xi_{i+1/2,j}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}^L) + \mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}^R)) - \\ &- \left[ \frac{\mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}^R) - \mathbf{F}_\xi(\mathbf{U}^L)}{\mathbf{U}^R - \mathbf{U}^L} \right]_{(NS+3) \times (NS+3)} \cdot (\mathbf{U}^R - \mathbf{U}^L)_{i+1/2,j}, \end{aligned}$$

- Oshera

$$\mathbf{F}_{\xi_{i+1/2,j}} = \mathbf{F}_\xi[\mathbf{U}^{Osher}(\mathbf{U}^R, \mathbf{U}^L)]$$

W powyższych schematach przez  $\mathbf{U}^{Riemann}$  oznaczono rozwiązanie zagadnienia Riemanna dla zadanych  $\mathbf{U}^L$ ,  $\mathbf{U}^R$  w zlinearyzowanej wersji podanej przez Godunowa w 1956 r. [40]. Przez  $\mathbf{U}^{Osher}$  podano zlinearyzowane rozwiązanie Oshera.

## Technika ENO

O ile rekonstrukcja TVD oparta o technikę MUSCL wykorzystuje dwa węzły przed brzegiem i dwa poza brzegiem to rekonstrukcja ENO nie ogranicza ilość węzłów przed i za brzegiem. Najczęściej jednak rekonstrukcja ENO oparta jest o trzy węzły przed i trzy węzły za rozpatrywanym brzegiem. Prowadzi to do odcinkami parabolicznej rekonstrukcji, której szczególnym przypadkiem jest odcinkowo liniowa rekonstrukcja TVD oraz stała rekonstrukcja  $\mathbf{U}^L = \mathbf{U}_{i,j} = \mathbf{U}^R$  typu Godunowa.

Rekonstrukcja ENO (w kierunku  $\xi$ ) oparta jest na następującym rozumowaniu. Wartości  $\mathbf{U}^L, \mathbf{U}^R$  winny być uzyskane na brzegu  $\xi_{i+1/2}$  w chwili pośredniej między  $n+1$  i  $n$ , oznaczanej umownie jako  $n+1/2$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^R &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_{i,j} \pm \frac{\Delta \xi}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \Big|_{i,j} = \\ &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_\eta}{\partial \eta} - \mathbf{S} \right) \Big|_{i,j} \pm \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_{i,j} = \\ &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \left( \pm \frac{\Delta \xi}{2} + \frac{\Delta t}{2J} \mathbf{A}_\xi \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} + \\ &+ \left[ -\frac{\Delta t}{2J} \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi} \cdot (\mathbf{F} \vec{e}_x + \mathbf{G} \vec{e}_y) \right] + \left( -\frac{\Delta t}{2J} \right) \frac{\partial \mathbf{F}_\eta}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

gdzie użyto (3.33) i przez  $\pm$  oznaczono  $(+L)(-R)$ . Aby otrzymać numeryczne wyrażenie na  $\mathbf{U}^R$  należy zamienić pochodne na różnice skończone. Jedną z propozycji aproksymacji (3.61) jest użycie limiterów drugiego rzędu, które sprawdzają znaki i wartości w oparciu o trzy węzły przed i trzy za krawędzią komórki obliczeniowej. Wtedy najprostsza rekonstrukcja ENO dla dowolnego  $\xi, \eta$  ma postać:



$$U(\xi, \eta) = U(\xi_i, \eta_i) + \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{i,j} (\xi - \xi_{i,j}) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big|_{i,j} (\eta - \eta_{i,j})$$

Do obliczenia pochodnych używany jest dwuparametrowy  $(\alpha, \beta)$  limiter, np.

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\Delta \xi} \minmod (\Delta_{\xi} U + \alpha \minmod [\Delta_{\xi} U - \Delta_{\xi-1} U, \Delta_{\xi+1} U - \Delta_{\xi} U], \Delta_{\xi+1} U - \beta \minmod (\Delta_{\xi+1} U + \Delta_{\xi} U, \Delta_{\xi+2} U - \Delta_{\xi+1} U))$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \xi_{i+1/2} - \xi_{i-1/2}, \\ \Delta_{\xi-1} U &= U_{i-1,j} - U_{i-2,j}, \\ \Delta_{\xi} U &= U_{i,j} - U_{i-1,j}, \\ \Delta_{\xi+1} U &= U_{i+1,j} - U_{i,j}, \\ \Delta_{\xi+2} U &= U_{i+2,j} - U_{i+1,j}, \end{aligned}$$

zaś

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{jesli } a \cdot b \leq 0 \\ b & \text{jesli } |a| > |b| \\ a & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Do numerycznej rekonstrukcji strumieni konwekcyjnych na brzegu używana jest najczęściej rekonstrukcja Godunowa (3.58)

$$U_{i+1/2,j} = F[F^{Riemann}(U^L, U^R)]$$

gdzie  $U^{Riemann}$  określa się poprzez linearyzację zagadnienia Riemanna zaproponowaną przez Godunowa. W przypadku przepływu z reakcjami chemicznymi należy stosować rozwiązanie Godunowa z zamrożonymi koncentracjami  $Y_k$  na nieciągłości. Pewne obejście tego uproszczenia zaproponował ostatnio Larrontrons [59].

Omówione powyżej schematy ENO i TVD należą do schematów drugiego rzędu dokładności i mają liczne zalety w odniesieniu do schematu pierwszego rzędu typu np. dekompozycji strumieni (Flux--Vector--Splitting, FVS) i rozdzielanie różnic strumieni (Flux--Difference Splitting --FDS). Wszystkie te techniki numerycznego, jawnego całkowania członów

konwekcyjnych należą do podejścia typu „upwind” opierającego się na schematach innych niż schematy centralne.

### 3.2.2 Dyskretyzacja w czasie

Dyskretny w przestrzeni ale nadal ciągły w czasie układ równań (3.33) może być zapisany, dla każdej objętości skończonej ( $s_m$   $m = 1, \dots, M$ , siatka niestrukturalna), w postaci:

$$s_m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_m(t) + \sum_{l=1}^{l=N} \int (\vec{F}^c \vec{n})_l d\ell = \sum_{l=1}^{l=N} \int (\vec{F} \vec{n})_l d\ell + \mathbf{S}_m s_m,$$

gdzie:

- $s_m$  powierzchnia objętości skończonej,
- $\mathbf{U}_m(t)$  wektor zmiennych zachowawczych uśredniony wg najprostszej techniki uśredniania,
- $l = 1, \dots, N$  bieżący numer odcinka brzegu  $\ell_l$  objętości skończonych przebiegającej od  $N$  równego ilości boków objętości skończonej
- $\vec{F} \vec{n}(t, \mathbf{U}_{s \pm \text{siedzi}(m+1)}, \mathbf{U}_{s \pm \text{siedzi}(m+2)}, \mathbf{U}_{s \pm \text{siedzi}(\text{dowolnegorzędu})})$  jest numerycznym strumieniem konwekcyjnym obliczanym na brzegach  $\ell_l$ ,  $l = 1 \dots N$ .

Jest on funkcją  $\mathbf{U}_m(t)$  oraz wszystkich  $\mathbf{U}_{m+k}$  wziętych dla  $k$  objętości skończonych sąsiadujących z  $s_m$ . W przypadku rekonstrukcji  $\mathbf{U}^L, \mathbf{U}^R$  opartych o dwa węzły przed siatką (TVD), do obliczenia  $\vec{F} \cdot \vec{n}$  konieczna jest druga warstwa sąsiadujących objętości oznaczona tu symbolicznie przez  $s_{m+2}$ . Rekonstrukcja ENO wymaga następnej warstwy sąsiadów  $s_{m+3}$ , co oznacza, że rekonstruując pole  $\mathbf{U}$  przed ścianką będziemy (dla zagadnienia jednowymiarowego) używać trzech wartości  $\mathbf{U}_{m+1}, \mathbf{U}_{m+2}, \mathbf{U}_{m+3}$ , określonych w kolejnych objętościach skończonych. W (3.67)  $\mathbf{S}_m(\mathbf{U}_m)$  jest członem Źródłowym najczęściej określanym dla  $\mathbf{U}_m = \text{const}$  w  $s_m$ , co oczywiście jest

spójne tylko z rekonstrukcją typu Godunowa i jest uproszczeniem dla rekonstrukcji TVD i ENO.

Dla siatek strukturalnych  $(\xi, \eta)$ ,  $m = (i, j)$ , równanie (3.67) jest całkowane tylko po czterech brzegach. Upraszczając całkowanie tylko do jednego punktu Gaussa otrzymujemy półdiskretną formę (3.67) dla  $(i, j)$  objętości skończonej

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{i,j}(t) = \frac{1}{\Delta \xi} (\mathbf{F}_{\xi^{i+1/2,j}}^* - \mathbf{F}_{\xi^{i-1/2,j}}^*) + \frac{1}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_{\eta^{i+1/2,j}}^* - \mathbf{F}_{\eta^{i-1/2,j}}^*) + \mathbf{S}_{i,j}$$

gdzie:  $\mathbf{F}_{\xi}^* = -\mathbf{F}_{\xi} + \mathbf{F}_{\xi}^V$  całkowity (konwekcyjny i dyfuzyjny) strumień na brzegu a  $\Delta \xi \Delta \eta = s_{i,j}$  powierzchnia objętości skończonej. Znak minus przed strumieniem wynika z ujemnego kierunku wektora normalnego orientującego bok  $(i-1/2)$  i bok  $(j-1/2)$

Symbolicznie (3.67) lub (3.68) przepisuje się w postaci odniesionej dla dowolnego  $(i, j)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = RHS(\mathbf{U}) \equiv RHS_{kov} + RHS_{dyf} + RHS_{source}$$

Problem dyskretyzacji w czasie ma dwa elementy:

- zbudowanie schematu różnicowego dla pochodnej po czasie spójnego z przyjętą rekonstrukcją przestrzenną (Godunov, TVD, ENO). W tym celu przedział czasu dzielimy na dowolne przyrosty czasu  $\Delta t$  i rozpatrujemy pole  $\mathbf{U}$  w dyskretnych momentach  $\mathbf{U}_{i,j}^n$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}^{n-1}$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+1}$ , itd. Schemat różnicowy dla czasu ma pewne ograniczenia -- nie może on zawierać niewiadomych  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+2}$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}^{n+3}$  -- stąd popularne są schematy „wstecz” używające  $\mathbf{U}_{i,j}^{n-2}$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}^{n-1}$  itd.

- elementem drugim jest odgadnięcie tego momentu w czasie, między punktem  $n$  i  $n+1$ , dla którego przyjęty schemat różnicowy będzie najdokładniej realizował pochodną czasową.

Przykładowo jeśli w schemacie Eulera „w przód”

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t},$$

w którym, nie używając różnic centralnych, pochodna na odcinku  $\Delta t$  jest aproksymowana stałą, to w punkcie (momencie)  $n+1/2$ , prawdopodobnie aproksymacja jest najlepsza. Stąd też obliczanie  $RHS$  lub strumieni  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}^v$  winno odbywać się w  $n+1/2$  tzn. na granicy obszaru czasoprzestrzennego. Ponieważ jedynymi dostępnymi wartościami są:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(U^n) \text{ -- schemat jawny,} \\ F(U^{n+1}) \text{ -- schematnie jawny,} \end{array} \right.$$

to pożądane rozwiązanie winno być złożeniem

$$HRS^{n+1/2} = \underbrace{HRS^n}_{\text{jawny}} + \underbrace{HRS^{n+1}}_{\text{niejawny}}$$

rozwiązania jawnego i niejawnego W ogólności, dla innego punktu niż  $n \neq 1/2$ ,  $\theta \neq 1/2$  mamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} = \theta HRS^{n+1} + (1-\theta) HRS^n.$$

Przybliżając pochodną po czasie za pomocą trzypunktowego schematu możemy zapisać (3.73) jako [9]

$$\mathbf{U}^{n+1} = \left[ \mathbf{U}^n + \frac{\theta}{1+\omega} HRS^{n+1} \Delta t + \frac{1-\theta}{1+\omega} HRS^n \Delta t + \frac{\omega}{1+\omega} [\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}] \right],$$

gdzie:  $1 \leq \theta \leq 1$ . Schemat jest drugiego rzędu względem czasu jeśli  $\theta = \omega + 1/2$ , trzeciego rzędu jeśli  $\omega = 2\theta - 5/6$ , a w pozostałych przypadkach jest rzędu pierwszego. jak wynika z (3.73), schemat jest jawny gdy  $\theta = 0$ , w przeciwnym razie jest jawno--niejawny, zaś dla  $\theta = 0$  staje się niejawny. Powyższy dwuparametrowy schemat zawiera również schemat Eulera niejawny ( $\theta = 1$ ,  $\theta = 0$ ) drugiego rzędu schemat trójpunktowy ( $\theta = 1$ ,  $\theta = 1/2$ ), schemat trzeciego rzędu niejawny ( $\theta = 1/3$ ,  $\theta = -1/6$ ).

W literaturze Numerycznej Mechaniki Płynów najwyższe preferencje ma **schemat jawny** rozwiązywania nieliniowych układów równań algebraicznych. Polega on na obliczaniu strumieni: konwekcyjnego  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ , dyfuzyjnego  $\vec{F}^v \cdot \vec{n}$  i członu Źródłowego, w oparciu o znane w kroku czasowym  $n$  pole  $\mathbf{U}^n$ . Obliczenie strumienia konwekcyjnego  $\vec{F}^{n+1/2} \cdot \vec{n}$  ma dużo wspólnego z obliczeniem wartości strumienia na brzegu objętości

skończonej -- potrzebna jest rekonstrukcja pola  $U^n$  w czasie. Różnica polega na tym, że odzyskuje się  $U^{n+\theta}$  tylko od strony znanych wartości  $U^n$ ,  $U^{n-1}$ ,  $U^{n-2}$ ,  $U^{n-3}$  co odpowiada  $U^L$  na brzegu  $\xi_{i+1/2} = const$ . Natomiast, przedłużając te porównanie, można utożsamić  $U^{n+\theta}$  obliczane w schemacie niejawnym -- czyli od strony  $U^{n+1}$ ,  $U^{n+2}$ , itd -- jako wartości  $U^R$  na brzegu  $\xi_{i+1/2} = const$ . Możemy, mając takie porównanie w pamięci, spodziewać się, że najlepsze rozwiązania będą dawały schematy jawno ( $F_{(\uparrow)}^{n+1/2}$ ) -- niejawne ( $F_{(\downarrow)}^{n+1/2}$ ) dla  $\theta = 1/2$ . Nie oznacza to, iż rozwiązanie uzyskane za pomocą schematu jawnego będą całkowicie niepoprawne -- mają one swoje zalety wśród których najważniejszą jest możliwość znalezienia rozwiązania w trybie *time marching* bez konieczności rozwiązania układu równań liniowych.

Najłatwiejszym jawnym schematem obliczania  $F^{n+\theta}$  jest metoda Runge-Kutta, która wprowadza pośrednie punkty między  $n+1$  i  $n$  wraz z pewnymi wagami. Standardowa metoda czwartego rzędu nie jest jednak spójna ze schematem przestrzennym o podwyższonej dokładności, stąd konieczne są schematy kompatybilne. Shuen [93] zaproponował następujący schemat trzeciego rzędu Runge-Kutta, dopasowany do TVD i ENO

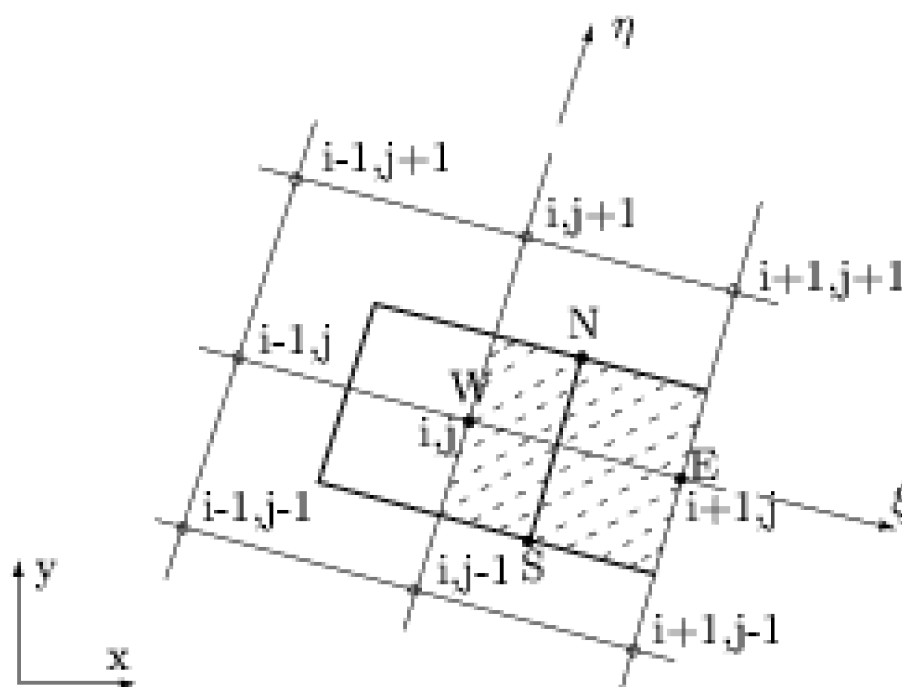
$$\left\{ \begin{array}{l} U^{(1)} = U^n + \Delta t RHS(U^n) \\ U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \Delta t RHS(U^{(1)}) \quad , \\ U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t RHS(U^{(2)}) \end{array} \right.$$

gdzie  $RHS(U)$  wg (3.69) jest obliczany w sposób jawny. Obliczenia kroku jawnego można, jak to się często robi, zakończyć już na kroku pierwszym (3.75) jednak wtedy dyskretyzacja czasowa nie będzie zwarta ze złożoną dyskretyzacją przestrzenną i zachodzi obawa iż utracimy tę część dokładności, o którą w technice ENO żeśmy zabiegali.

### 3.2.3 Strumienie dyfuzyjne

Obliczanie strumieni dyfuzyjnych w schemacie jawnym metodą o wysokiej rozdzielczości typu ENO, TVD jest problemem trudnym i do dziś nierozwiązanym. Podawane, w dostępnej literaturze, informacje na temat

obliczania strumienia dyfuzyjnego  $\vec{F}^v \cdot \vec{n}$  na brzegu objętości skończonej nie wspominają nic o tym czy proponowana technika obliczania  $\vec{F}^v \cdot \vec{n}$  współgra ze schematami o wyższej rozdzielczości TVD i ENO używanymi do numerycznej rekonstrukcji. członu konwekcyjnego strumienia  $\vec{F} \cdot \vec{n}$ . Stąd też, można podejrzewać, że traktowane „po macoszemu” obliczanie strumieni dyfuzyjnych nie współgra z subtelnym charakterem technik drugiego rzędu TVD i ENO stosowanym do schematu „upwind”.



Rys. Komórka do bilansowania członów lepkich w kierunku  $\xi$  [120]

Jak wiadomo strumienie dyfuzyjne zawierają gradienty pola  $\nabla U$  i ich nieliniowe kombinacje oraz kombinacje typu  $U \cdot (\nabla U)$ . Będą to pochodne prędkości dla członu lepkiego, pochodne temperatury do strumienia ciepła, pochodne  $k$  i  $\varepsilon$  w dwurównaniowym modelu turbulencji, itd. Pochodne te, symbolicznie oznaczone jako  $\nabla U$  winny być, zgodnie z zasadą rekonstrukcji ENO, obliczane z lewej i prawej strony brzegu objętości skończonej:  $(\nabla U)^L$ ,  $(\nabla U)^R$ , podobnie jak obliczono  $U^L$  i  $U^R$ . Jeśli rekonstruowane pole  $U(\eta, \xi)$  jest odcinkami paraboliczne to spójna z ENO rekonstrukcja  $\nabla U(\xi, \eta)$  musi być odcinkami liniowa. Metoda TVD i ENO używa już pochodnych  $(\nabla U)_{i,j}$  obliczonych jednakże w środku objętości skończonej, stąd najprostszym, pierwszego rzędu schematem, jest położenie  $(\nabla U)^R|_{i+1/2} = (\nabla U)|_{i,j} =$

$(\nabla \mathbf{U})^L|_{i-1/2}$  stałego gradientu w obszarze objętości skończonej, oraz wartości strumienia dyfuzyjnego na brzegu jako średniej strumienia lewej i prawej strony np.:

$$\mathbf{F}_{\xi^{i+1/2}}^v = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}_{\xi^{i+1/2}}^v(\nabla \mathbf{U}|_{i,j}, \mathbf{U}^L) + \mathbf{F}_{\xi^{i+1/2}}^v(\nabla \mathbf{U}|_{i+1,j}, \mathbf{U}^R) \right] \quad (3.76)$$

Fizycznie oznacza to iż mamy stałe wartości naprężeń lepkich, strumienia ciepła w całej objętości skończonej a zmiany (nieciągłe) zachodzą tylko na brzegach sąsiadujących objętości. Schematem drugiego rzędu jest schemat wykorzystujący zrekonstruowane pola  $\mathbf{U}(\xi, \eta)$ , używane wcześniej do członów konwekcyjnych. Przy ich pomocy można policzyć wartości w wybranych punktach (np.  $\mathbf{U}_S$  i  $\mathbf{U}_N$  rys. 6) i użyć ich do skonstruowania pochodnych na poszukiwanym brzegu. W praktyce do obliczania strumieni dyfuzyjnych używa się schematów niespójnych z rekonstrukcją ENO, lecz skutecznych w szeregu obliczeniowych sytuacjach. Prosty model numerycznego wyliczania członów lepkich (dyfuzyjnych), dla siatek strukturalnych podaje Wróblewski [120] i Chmielniak [23]. Polega on na rekonstrukcji wartości  $\mathbf{U}_N$  i  $\mathbf{U}_S$  małej ekstra--komórki, służącej do obliczania pochodnych w punkcie  $\xi_{i+1/2}, \eta_j$  (rys 6).

Pochodne w środku bloku  $NS$  obliczane są za pomocą następujących związków [120]

$$\left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi} \right)_{i+1/2,j} = \frac{1}{A} [\mathbf{U}_E \nabla \eta_E + \mathbf{U}_N \nabla \eta_N + \mathbf{U}_W \nabla \eta_W + \mathbf{U}_S \nabla \eta_S]$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} \right)_{i+1/2,j} = -\frac{1}{A} [\mathbf{U}_E \nabla \xi_E + \mathbf{U}_N \nabla \xi_N + \mathbf{U}_W \nabla \xi_W + \mathbf{U}_S \nabla \xi_S]$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \nabla \eta_E &= \eta_{NE} - \eta_{SE}, & \nabla \xi_E &= \xi_{NE} - \xi_{SE}, \\ \nabla \eta_N &= \eta_{NW} - \eta_{NE}, & \nabla \xi_N &= \xi_{NW} - \xi_{NE}. \end{aligned}$$



Określenia wymaga powierzchnia  $A$  oraz wartości  $U_N$  i  $U_S$ . Te mogą być zrekonstruowane jako średnie:

$$U_N = \frac{1}{4} [U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j}]$$

$$U_S = \frac{1}{4} [U_{i,j-1} + U_{i+1,j-1} + U_{i+1,j} + U_{i,j}]$$

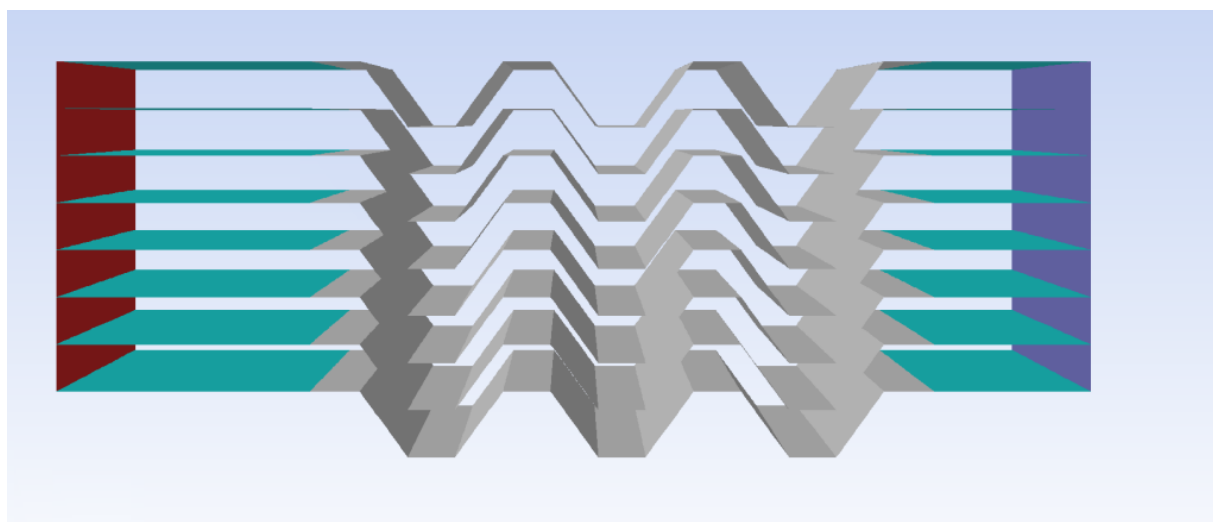
Podobne operacje należy wykonać dla pozostałych trzech boków objętości skończonej.

### Obliczenia zastępczego demistera

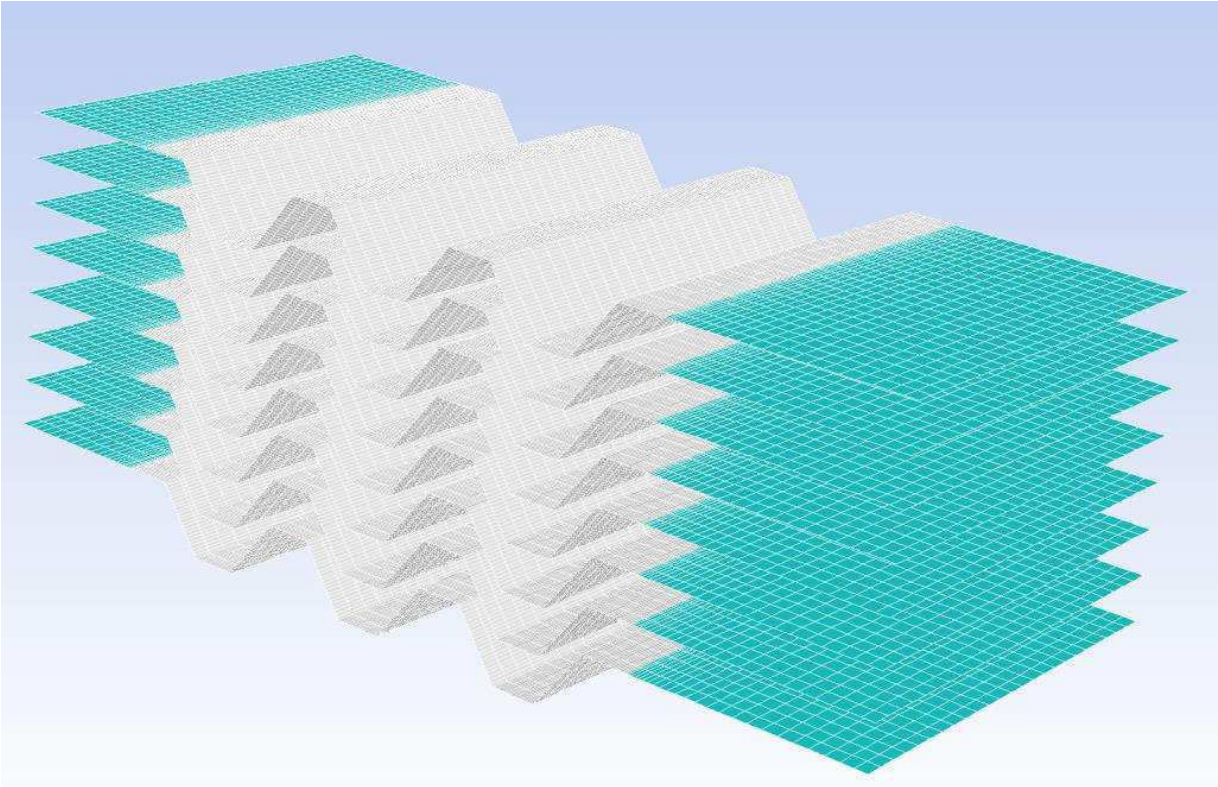
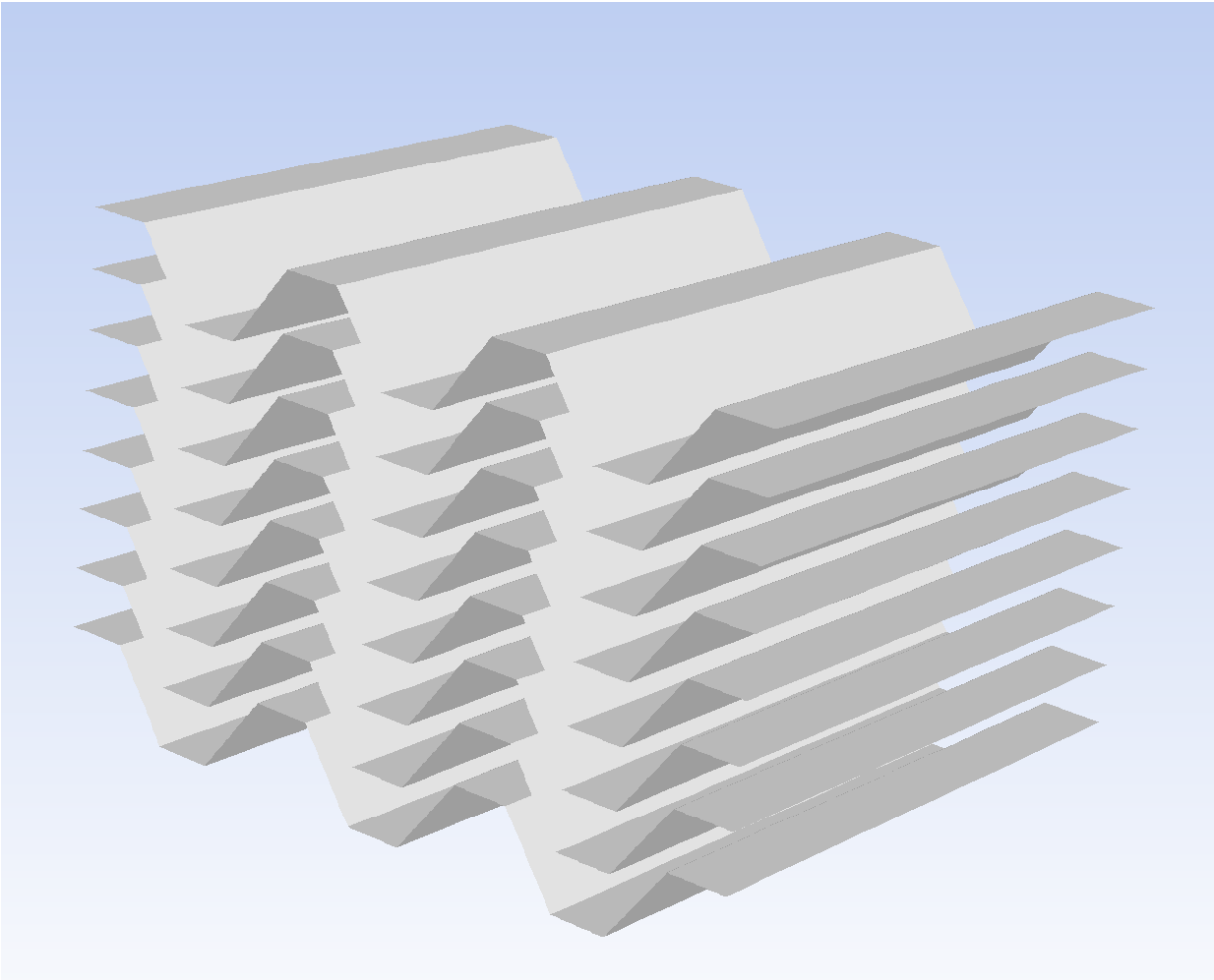
Zgodnie z metodyką pracy przyjętą w poprzednim rozdziale, zasadniczym celem jest opracowanie korelacji na wewnętrzny opór materiału porowatego, który można wprowadzić jako zasadniczy parametr do modelowania pośredniego demistera. W tym celu zbudowano model obliczeniowy przepływu jednofazowego przez kanały demistera i przeprowadzono seryjne obliczenia przy różnych prędkościach przepływu celem wyznaczenia spadków ciśnień na demisterze.

### Geometria

Geometria układu przepływowego została przedstawiona na poniższym rysunku. Wlot został zaznaczony kolorem niebieskim, a wylot kolorem czerwonym.



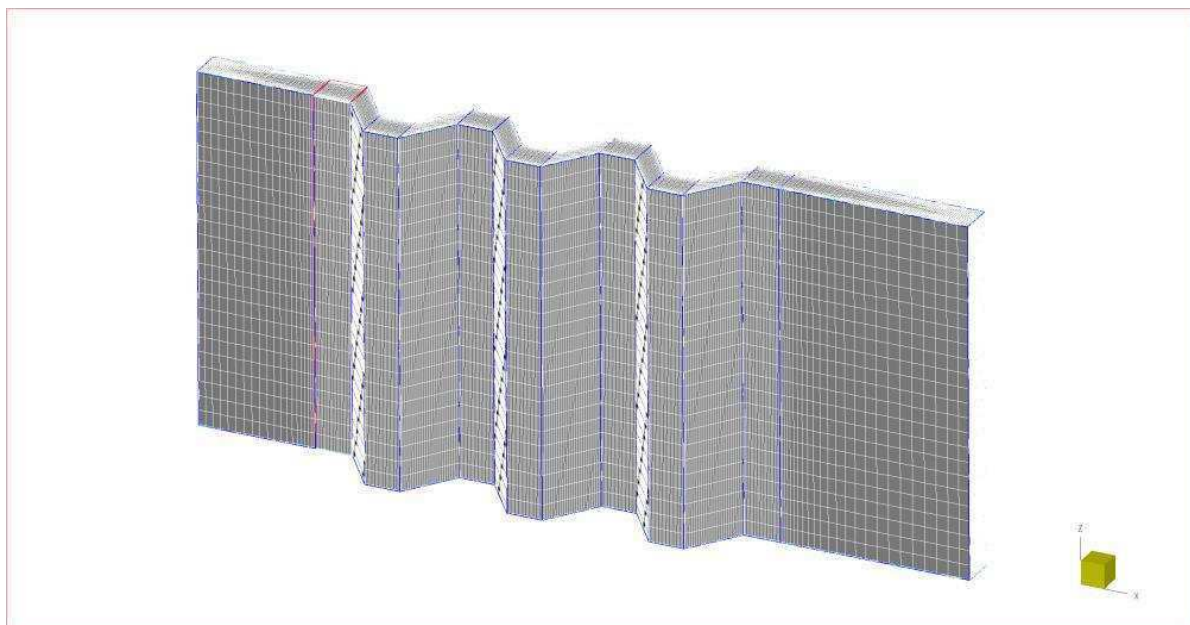
Rys. Model demistera.



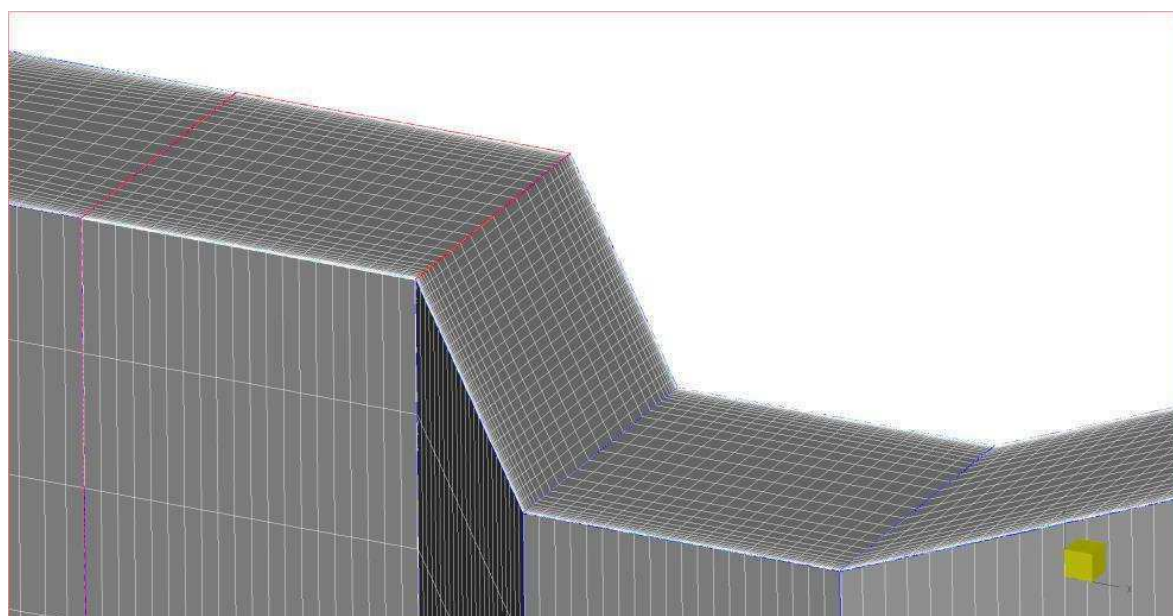
Rys. Model demistera

## Charakterystyka modelu i parametry numeryczne

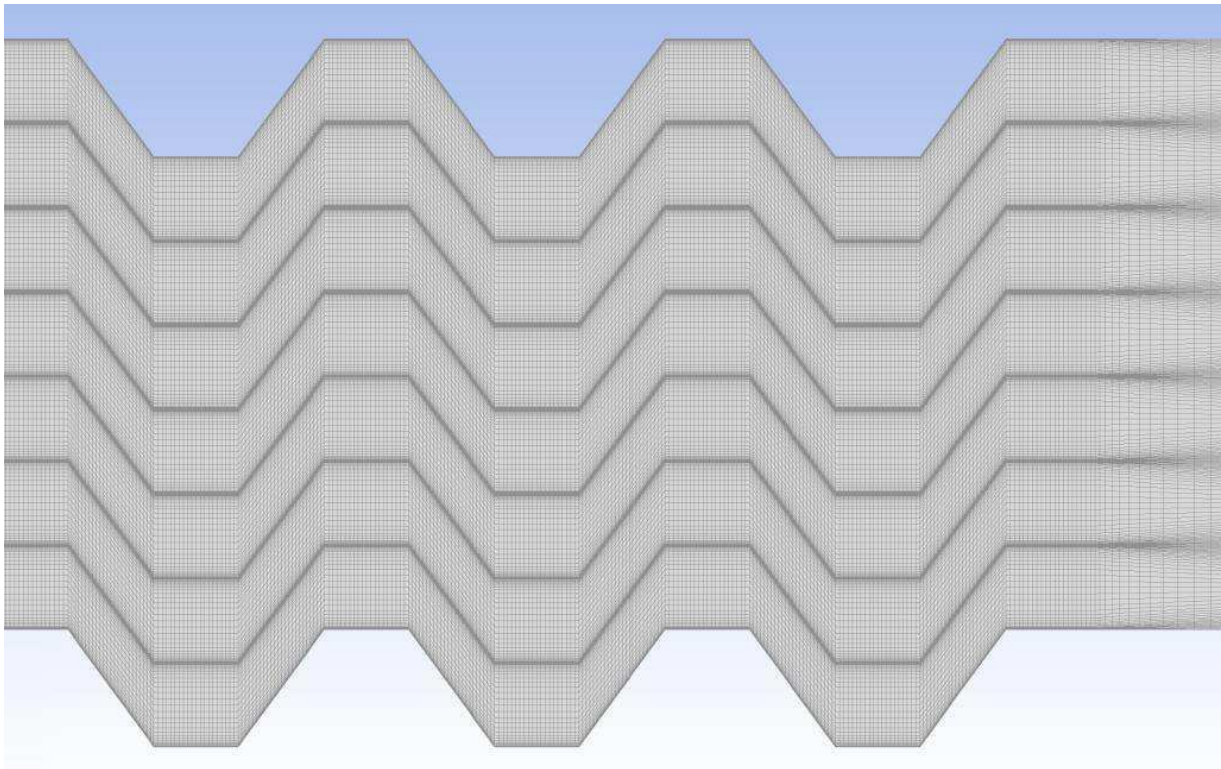
Obliczenia zostały wykonane programem Ansys/Fluent. Siatka obliczeniowa dla obszaru przedstawionego powyżej została wygenerowana w programie IGG/Numeca. Na rysunkach poniżej przedstawiono jeden segment układu przepływowego oraz zestawienie kilku segmentów.



Rys. Siatka w obszarze wkładu koalescencyjnego



Rys. Siatka w obszarze wkładu koalescencyjnego - powiększenie

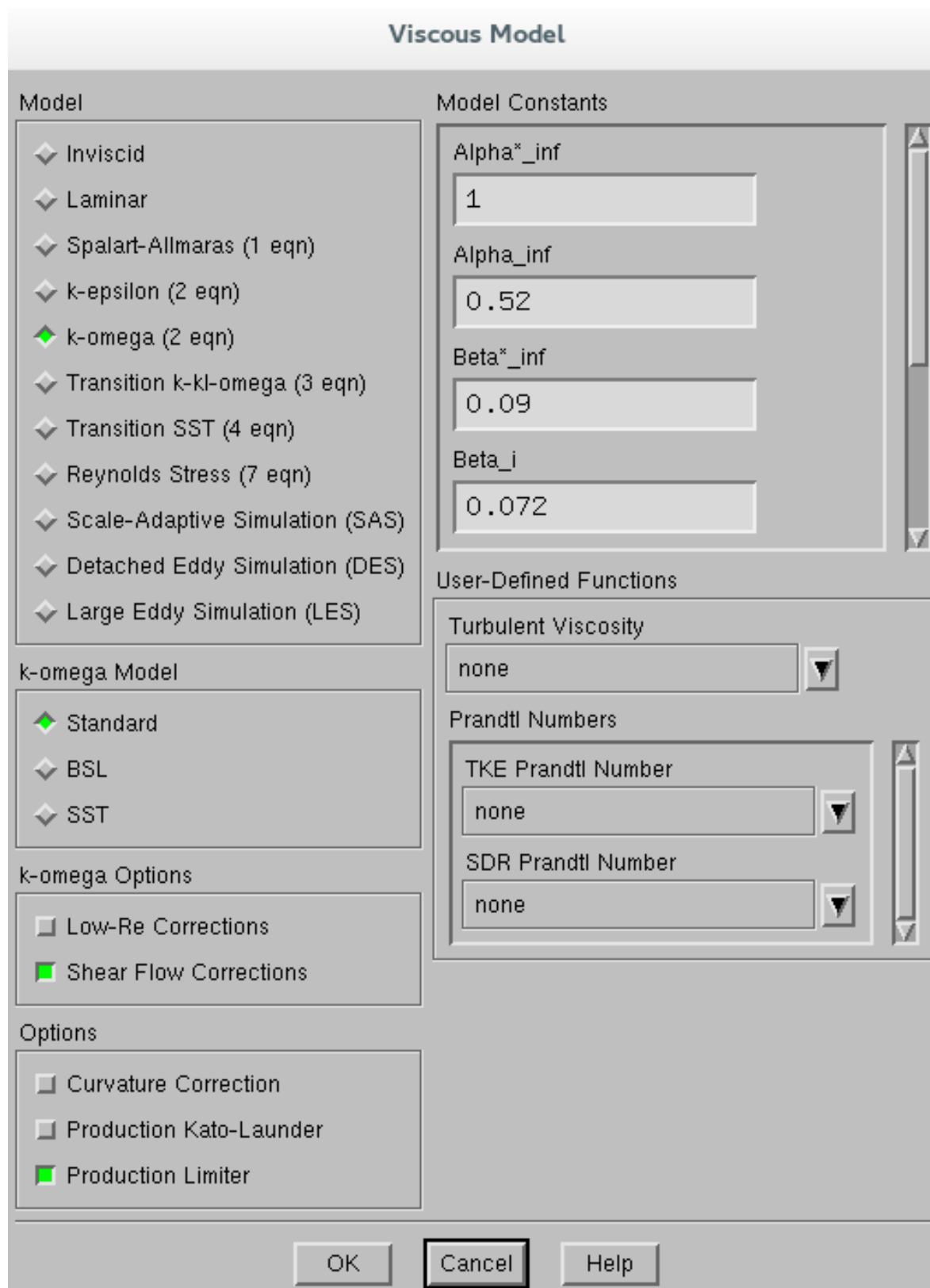


Rys. Siatka obliczeniowa demistera

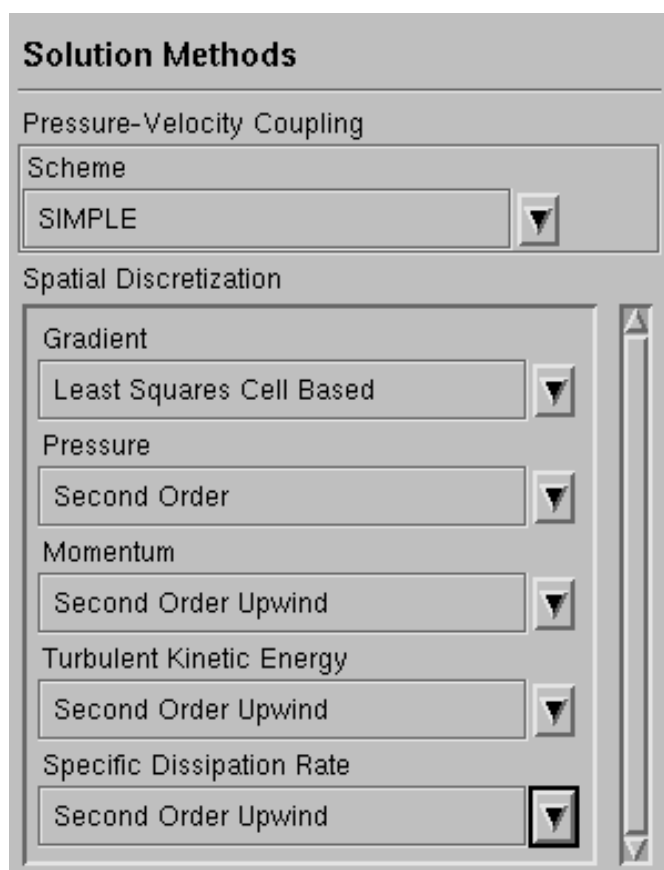
Obliczenia wykonano przy wykorzystaniu modelu turbulencji k-omega standard. Jego parametry zamieszczono na widoku przedstawiający wybrane ustawienia w programie Fluent.

Istotnym elementem modelu obliczeniowego są jego parametry, schemat numeryczny członów konwekcyjnych poszczególnych równań oraz parametry metody numerycznej

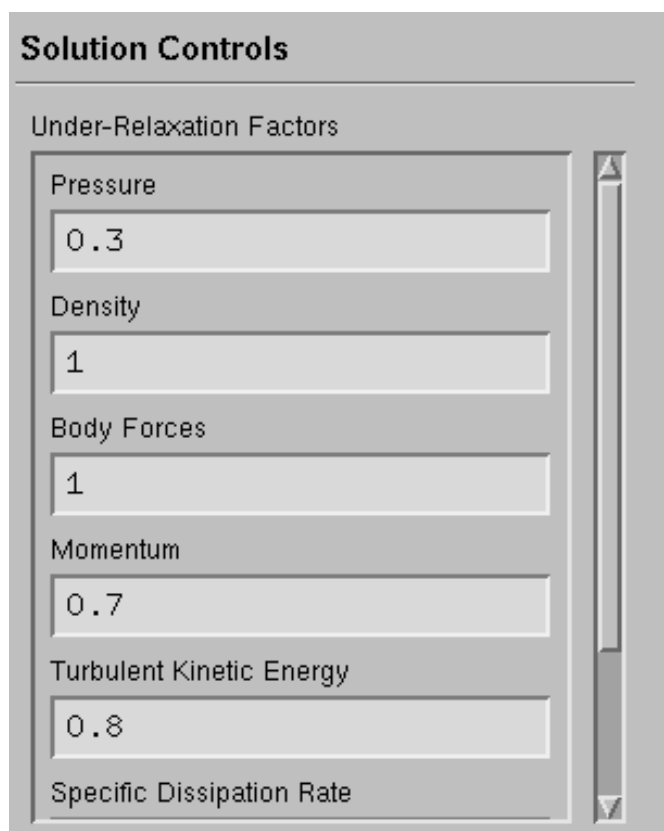




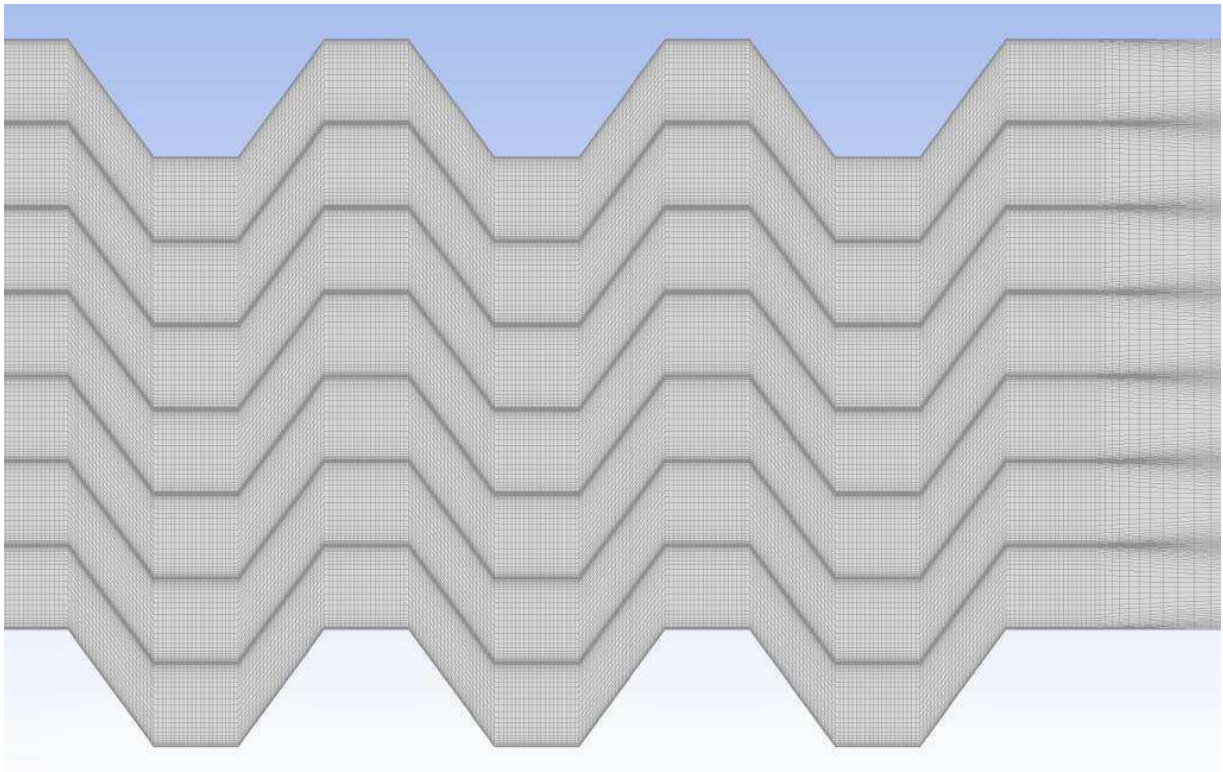
Rys. Parametry modelu turbulencji



Rys. Parametry modelu numerycznego – schemat numeryczny

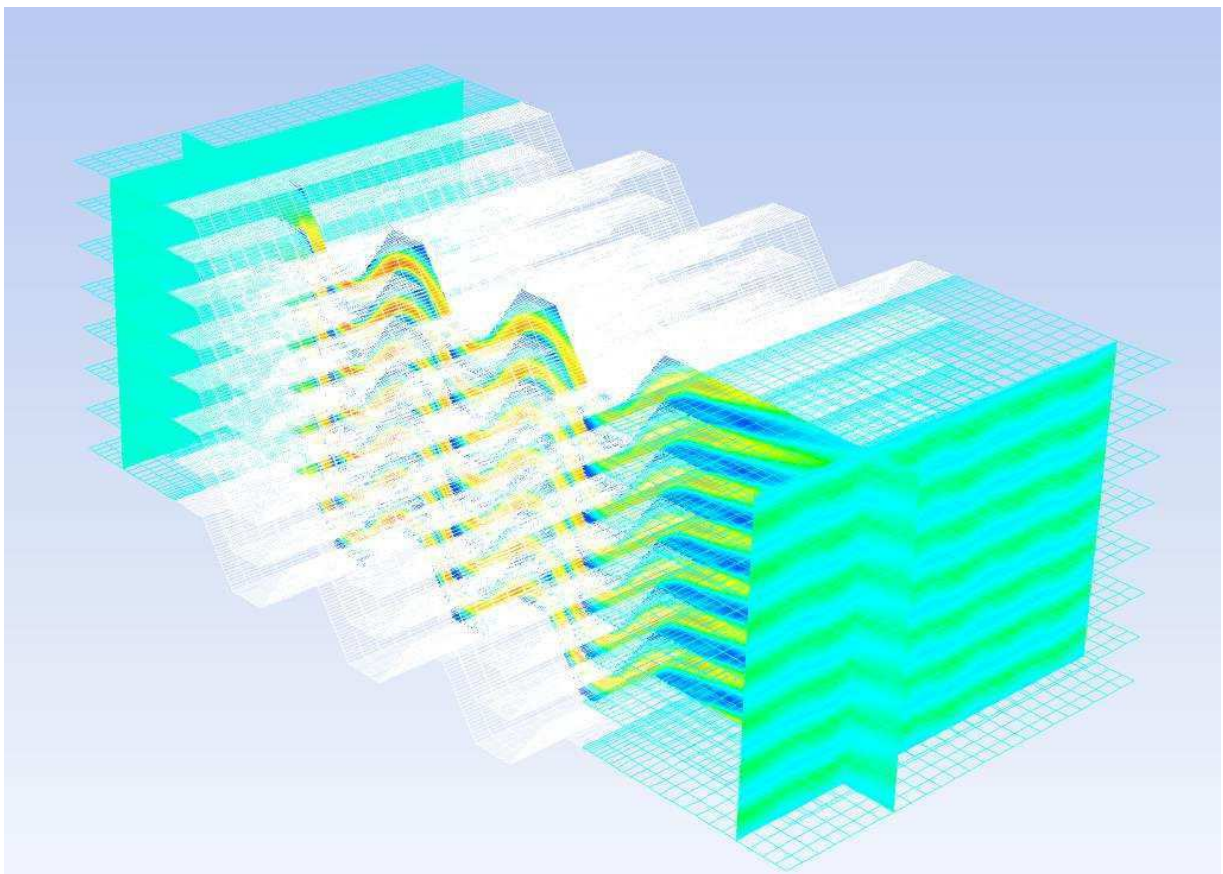


Rys. Współczynniki podrelaksacji

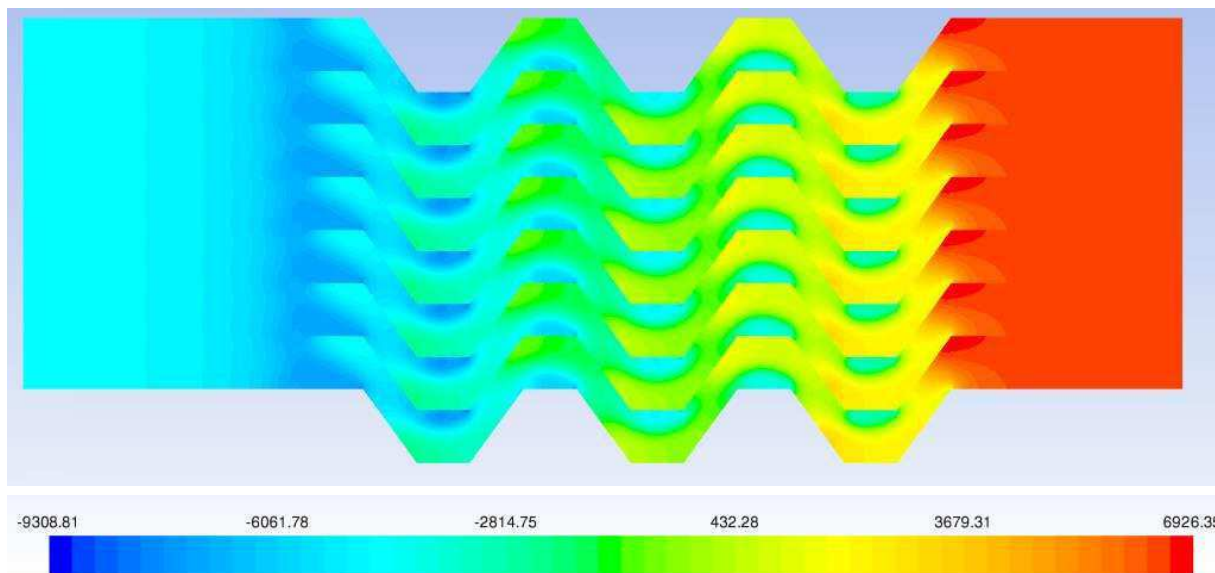


Rys. Siatka obliczeniowa demistera

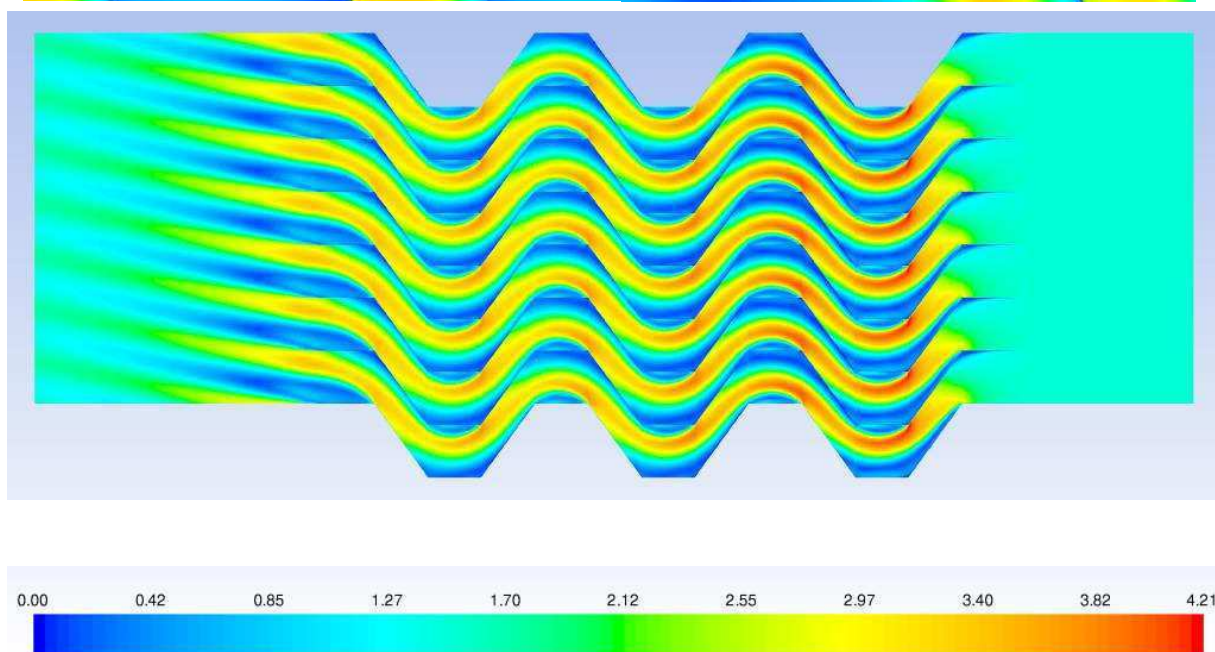
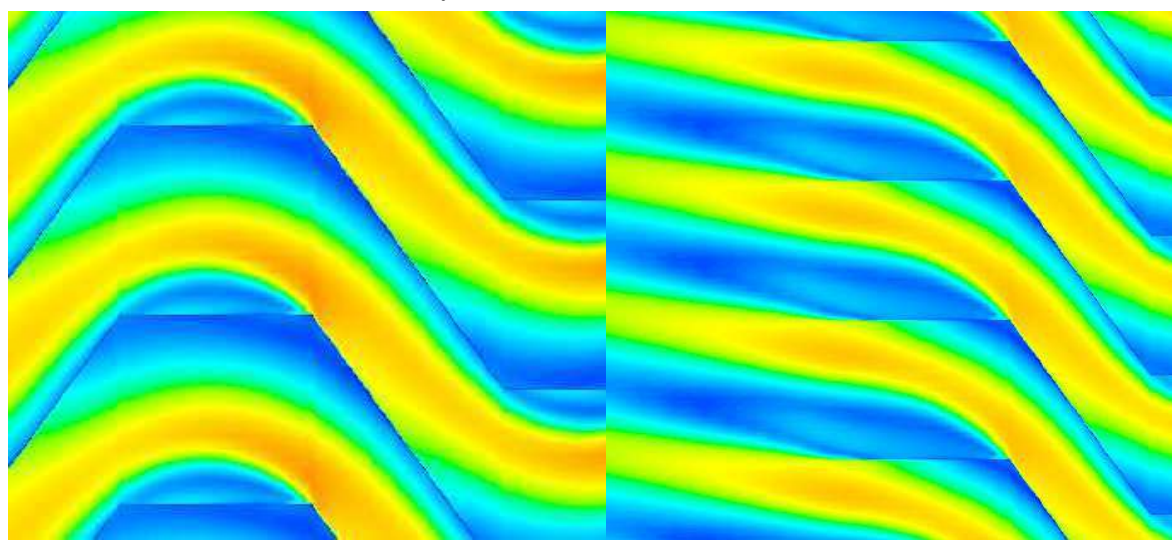
### Wyniki obliczeń



Rys. Widok płaszczyzn do wizualizacji pól prędkości i ciśnienia.

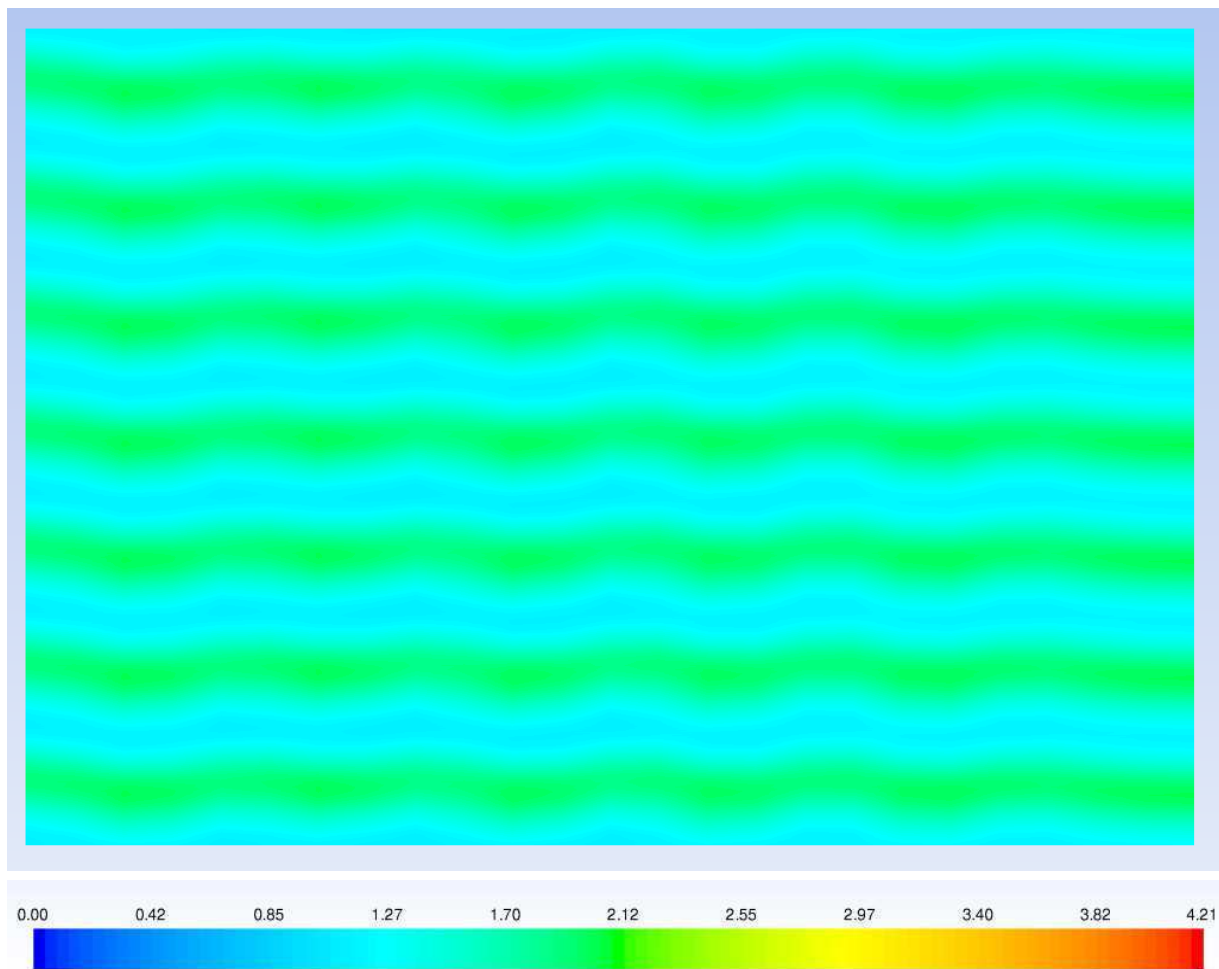


Rys. Rozkład ciśnienia



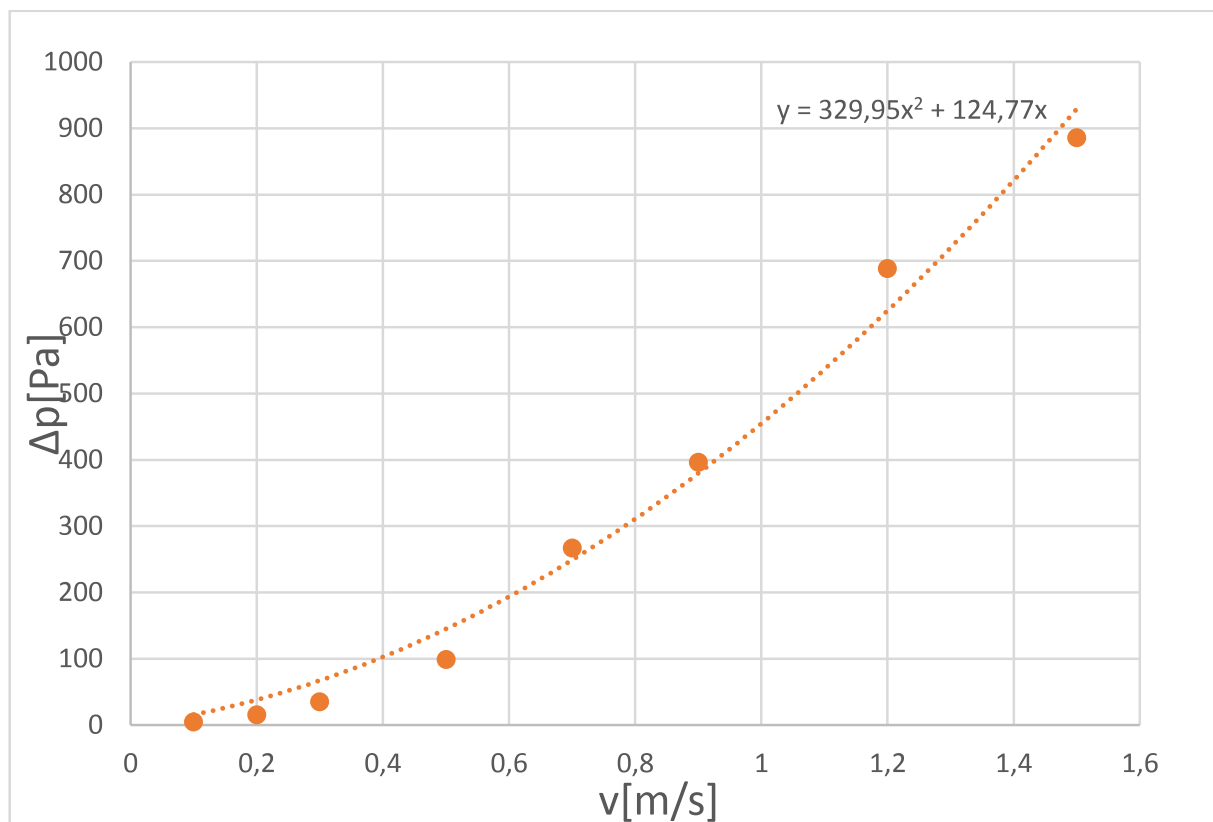
Rys. Rozkład prędkości





Rys. Rozkład prędkości.

Na wykresie poniżej przedstawiono wyniki symulacji numerycznej charakterystyki oporowej demistera, na podstawie której interpolując dane obliczeniowe za pomocą funkcji kwadratowej otrzymuje się poszukiwane parametry ośrodka porowatego:  $\alpha$  oraz  $C_2$ .

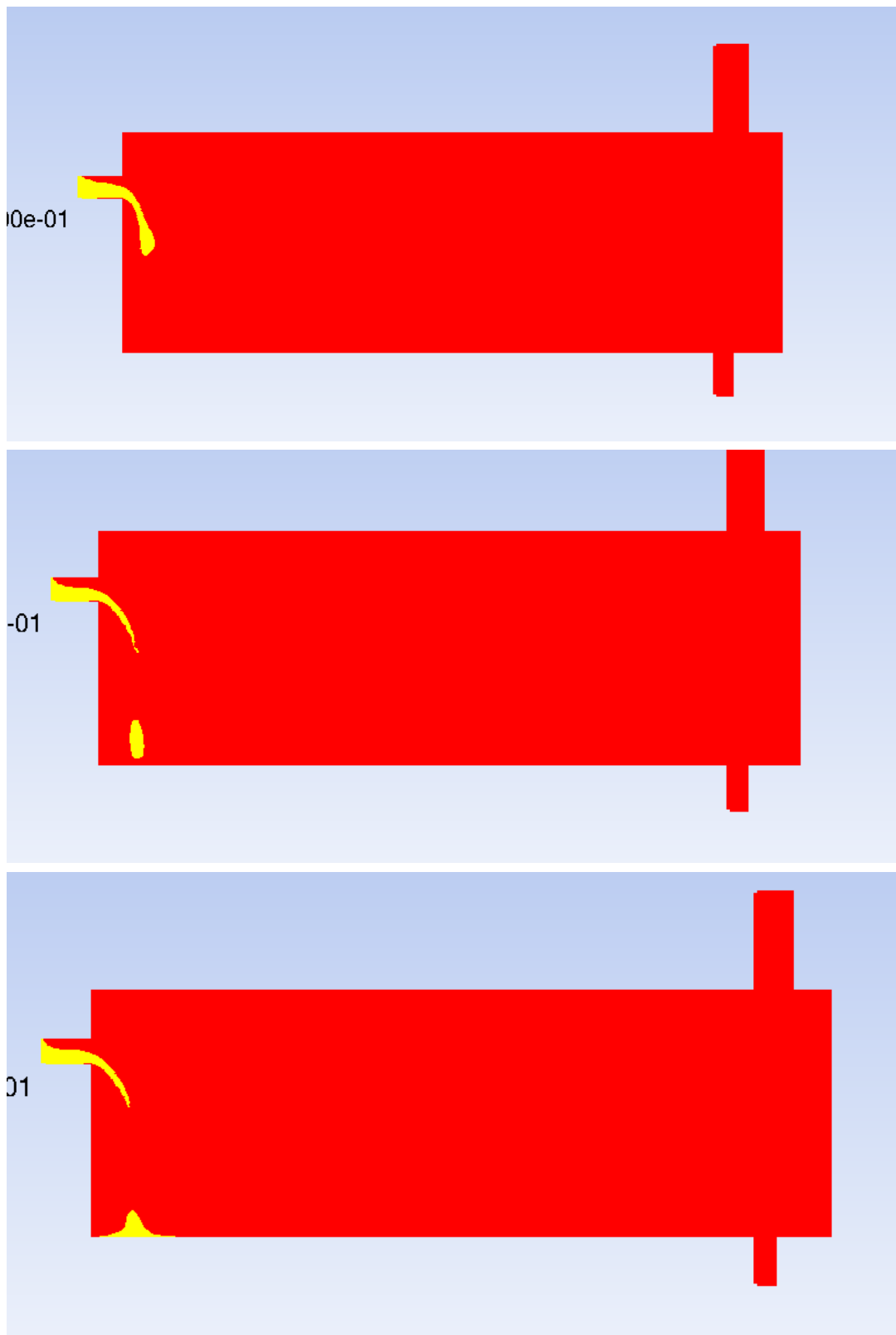


Wykres. Charakterystyka demistera.

## Wstępne obliczenia separatora w ramach modelu 2D

Przedstawione powyżej wyniki dotyczą analizy pojedynczego elementu separatora, a uzyskane wyniki mogą być wykorzystane w kolejnych analizach z wykorzystaniem bardziej złożonych geometrii układu przepływowego.

Poniżej przedstawiono wstępne wyniki obliczeń przepływu w ramach modelu dwuwymiarowego z rozdziałem faz w separatorze. Obliczenia są wykonywane w ramach zagadnienia niestacjonarnego, dlatego ze względu na złożoność i czasochłonność realizowanego zadania, wyniki uzyskane w ramach tego modelu zostaną przedstawione w kolejnym raporcie (kolejny etap prac). Na rys. przedstawiono 3 wybrane obrazy reprezentujące poszczególne rozwiązania chwilowe charakteryzujące proces wypełniania separatora, a w dalszej fazie jego pracy proces separacji.



Rys. Wpływ czynnika do separatora - wstępne wyniki

## Rekomendacje

We wszystkich symulacjach stosowano model turbulencji SST z rodziny modeli  $k-\omega$ , jednak zastosowanie innych modeli rodziny  $k-\omega$  lub  $k-\epsilon$  nie

powinno skutkować znacząco rozbieżnością wyników. Płyn modelowany był jako nieściśliwy (olej, woda), a intensywność turbulencji ustalona była na poziomie 0.2% i mniej. Średnicę hydrauliczną (dla obliczeń turbulencji) przyjmowano jako równą 10% przekroju lameli demistera.. Pozostałe wartości parametrów modelu turbulencji pozostawiono jako domyślne. Symulacje ograniczone były do rozwiązywania równania ciągłości i równania pędu. Za rozwiązanie zbieżne uznano takie, gdy residua równania ciągłości oraz składowych prędkości osiągnęły poziom  $10^{-3}$  w symulacjach wstępnych oraz  $10^{-6}$  w symulacjach weryfikacyjnych. W przypadkach gdy wyznaczano charakterystyki demistera  $\Delta p = f(w)$ , na wlocie stosowano warunek prędkościowy.